A MATEMATIKAI TUDÁS ONLINE DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉNEK TARTALMI KERETEI

Szerkesztette:
Csapó Benő • Csíkos Csaba • Molnár Gyöngyvér

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET

A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei

A MATEMATIKAI TUDÁS ONLINE DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉNEK TARTALMI KERETEI

Szerkesztette
Csapó Benő, Csíkos Csaba és Molnár Gyöngyvér

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
Budapest

Diagnosztikus mérések fejlesztése
Projektazonosító: TÁMOP 3.1.9-11/1-2012-0001

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Szerzők:
Ambrus Gabriella, Csapó Benő, Csíkos Csaba, Józsa Krisztián, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Molnár Gyöngyvér, Szitányi Judit, Zsinkó Erzsébet

A kötet fejezeteit lektorálta:
András Szilárd, Kelemen Rita, Kosztolányi József, Vancsó Ödön

ISBN 978-963-19-7936-7

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc utca 6–8.
Tel.: (+36-1) 235-5508
Fax: (+36-1) 235-7202

A kiadásért felel: dr. Kaposi József főigazgató
Felelős szerkesztő: Simonyi Kata
Műszaki szerkesztő: Kóródiné Csukás Márta
Nyomdai előkészítés: Karácsony Orsolya
Raktári szám: NT-42701
Terjedelem: 25,38 (A/5) ív
Első kiadás, 2015.

Nyomda: Duna-Mix Kft., Vác
Felelős vezető: Szakolczai Lóránt ügyvezető igazgató

Matematyka jest najpiękniejszym i najpotężniejszym tworem ducha ludzkiego.

A matematika az emberi szellem legszebb és leghatalmasabb alkotása.

Stefan Banach

Tartalom

Bevezetés

A diagnosztikus értékelési program alapvető célja egy olyan online mérési rendszer kidolgozása, amely lehetővé teszi, hogy a tanulók fejlődését az iskolába lépéstől a hatodik évfolyam végéig követhessük. A részletes feladatrendszer három fő területre, az olvasásra, a matematikára és a természettudományra terjed ki, azokra az ismeretekre, készségekre és képességekre, amelyek a későbbi iskolai és iskolán túli tanulás sikerességét alapvetően meghatározzák. Az olvasás-szövegértés, a matematika és a természettudomány alkotják a nemzetközi felmérési programok fő területeit is. Ebben a kötetben a matematika felmérésének tartalmi kereteit adjuk közre, egy hatéves munka eredményeként.

A diagnosztikus értékelés projekt második szakaszának egyik kiemelt feladata a mérések tartalmi kereteinek átdolgozása, felújítása volt. A fejlesztési program 2009-ben indult. Az első szakaszban viszonylag rövid idő alatt sok feladatot kellett egymással párhuzamosan megoldani. A technológiai lehetőségek felmérése a szakirodalom feldolgozásával és az elérhető rendszerek kipróbálásával kezdődött, majd végül megszületett a döntés egy teljesen új online platform kifejlesztésére. A technológiai alap felépítésével párhuzamosan – széles körű nemzetközi összefogással – kerestük a választ arra a kérdésre, mit lehet és mit érdemes felmérni az iskola kezdő szakaszában, feltéve, hogy egy gyakran alkalmazható, nagyon pontos mérőeszköz áll rendelkezésünkre. Mindemellett, az idő szorításában, elkezdtük a feladatíró munkatársakat felkészíteni az új rendszerben létrehozandó feladatbank megalkotására. E felkészítésnek három komponense volt, egyrészt a méréselméleti-tesztszerkesztési tudás közvetítése, másrészt a technológiai készségek fejlesztése, harmadrészt pedig mérendő területek tartalmával kapcsolatos szakmai, tantárgy-pedagógiai tudás felfrissítése. Ebben a különböző folyamatok közötti szoros interakcióban született meg a mérendő területeket definiáló, a tesztek és feladatok tartalmát részletesen leíró dokumentumok első változata.

A párhuzamosan végzett feladatmegoldásnak és a különböző munkacsoportok közötti együttműködésnek sok előnye volt, és a tartalmi kereteket kidolgozó teamek is hasznosíthatták a technológiai fejlesztés terén elért eredményeket és a továbbképzések tapasztalatait is. Ugyanakkor az egyidejűség eltért a mérési rendszerek kidolgozásának egymásutániságra épülő hagyományos logikájától, mely szerint először elkészülnek a felmérések tartalmának leírásai, majd sor kerül azok feladatokká alakítására, tesztekkel való leképezésére. A mérések tartalmi keretei nem a feladatírást megelőzően, hanem az első fejlesztési szakasz végén jelentek meg, mintegy összegezve az e téren végzett munka tapasztalatait. A diagnosztikus értékelés tartalmának ilyen alapos és részletes leírása nemzetközi téren is újdonságnak számított, és annak érdekében, hogy az eredményeinket szélesebb körben is elérhetővé tegyük, a szakértők tágabb körét bekapcsolhassuk a további fejlesztésekbe, a köteteket angol nyelven is megjelentettük.

Korábbi kutatásaink és az elméleti elemzőmunka eredményeként arra a megfontolásra jutottunk, hogy a tanulók tudását három fő dimenzióban célszerű felmérni. Ennek megfelelően a matematika területén egyrészt leírtuk – elsősorban az érvényben levő tantervre támaszkodva –, hogy mit tanulnak a diákok az iskolában, milyen tananyag elsajátítását lehet közvetlenül felmérni (tartalmi, tantervi dimenzió). Másrészt a matematika tudásának nagyon sokféle alkalmazási lehetősége van, és a korábbi hazai, valamint nemzetközi felmérésekből is ismert, hogy tanulóink ezen a téren kevésbé jól teljesítenek. A tudás alkalmazása, átvitele új területekre nem automatikus, erre fel kell készíteni a tanulókat. Az e téren végzett fejlesztést a diagnosztikus értékeléssel is segíteni lehet (alkalmazás dimenzió). Harmadrészt az iskola alapvető célja a tanulók értelmi képességeinek kiművelése, ahol a matematika iskolai tanulása kiemelkedően fontos szerepet játszik. Ennek megfelelően a matematikai gondolkodás alakulása a diagnosztikus mérések harmadik dimenziója.

A tartalmi kereteket bemutató korábbi kötetek öt fejezetre tagolódtak. Az első három fejezet részletesen bemutatta az előzőekben felvázolt három dimenzió tudományos alapjait. Ezeket az elméleti kereteket további munkánk szempontjából is meghatározónak tartjuk. A negyedik fejezetek összefoglalták az elméleti fejezetek részletes tartalmi keretekre és a feladatok kidolgozására vonatkozó következtetéseit, míg az ötödik fejezetek részletesen leírták a mérések tartalmát a három említett dimenzióban.

A projekt második szakaszának megkezdésekor helyreállt a feladatírás és tesztfejlesztés szokásos logikája. A feladatírók képzésére, a feladatok kidolgozására, a feladatbank felépítésére már az elméleti alapok és a mérendő tartalmak részletes leírásai alapján kerülhetett sor. Közben elkészült az új, saját fejlesztésű online platform is. Az új eDia platform és rendszer kihasználja a szoftvertechnológia legújabb eredményeit, és reflektál a széles körben elérhető információtechnológiai eszközök gyors változásaira is. A hétköznapi életben mind gyakoribbá válik a vezeték nélküli mobil eszközök alkalmazása, az érintőképernyők használata, ami új lehetőségeket kínál a tesztfeladatok megalkotására is. A matematikához elkészült közel 7000 feladat már figyelembe vette ezeket a lehetőségeket is.

Az itt felvázolt folyamatokra, eredményekre és tapasztalatokra építve készült el a matematika online diagnosztikus felmérések tartalmi kereteinek újabb változata. Ebben a kötetben a mérések tartalmának részletesebb leírása áll a középpontban. Egy-egy fejezet foglalkozik a felmérések három dimenziójával, külön-külön bemutatva a gondolkodás, az alkalmazás és a tantervi tartalom terén végezhető mérések részletes leírásait. Az egyes mérési dimenziók tartalmának részletes meghatározása már egyértelműen a technológiai mérések lehetőségeit veszi alapul. Az illusztrációk, feladatvázlatok egyaránt az online rendszerből származnak.

A korábbihoz hasonlóan ez a kötet is a fejlesztési szakasz végére készült el, felhasználva annak minden lényeges eredményét. Ugyanakkor ezt a munkát nemcsak a korábbi munka lezárásnak, hanem egy újabb folyamat kezdetének is tekintjük. Az online rendszer minden fontosabb funkciója működik, és már közel ezer iskolában került sor a kipróbálására. A következő években lehetőség nyílik a rendszerszerű használatra, a tanulók fejlődésének követésére. A tartalmi kereteknek ez az újabb változata nem csupán megalapozza a feladatbank továbbfejlesztését, hanem tájékoztatja a mérések minden érintettjét is azok tartalmáról.

A kötet megszületésében a szerzőkön kívül számos további munkatársunknak szerepe volt, akiknek ezúton is köszönetet mondunk. Külön is köszönjük a feladatokat kidolgozó kollégák, továbbá a projektet irányító team, *Molnár Katalin, Kléner Judit* és *Túri Diána* munkáját.

Csapó Benő, Csíkos Csaba és Molnár Gyöngyvér

1.

A matematika online diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek elméleti alapjai

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Molnár Gyöngyvér
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Csapó Benő
MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének bemutatását egyrészt korábbi, még nem kifejezetten technológiaalapú értékelésre fokuszáló kötetünk három elméleti fejezetére alapoztuk (*Nunes* és *Csapó,* 2011; *Csíkos* és *Verschaffel,* 2011; *Szendrei* és *Szendrei,* 2011), másrészt az átdolgozás során figyelembe vettük, hogy a mérésekre online rendszerben kerül sor. A példafeladatok kivétel nélkül az eDia platformból származnak, ezáltal is demonstrálva a számítógép-alapú tesztelés nyújtotta lehetőségeket és előnyöket. Az átdolgozott tartalmi keretek reményeink szerint nem csupán a szakértők szűkebb körének és a feladatíróknak munkáját segítik, hanem valamennyi tanító és matematikatanár haszonnal forgatja majd a kötetet. E fejezet célja, hogy a három értékelési dimenzió szerint tagolt részletes tartalmi keretek felhasználásához négy szempont szerint nyújtson támpontot. Megmutatjuk, miként használtuk a nemzetközi kutatások eredményeit, mely hazai forrásművekre támaszkodtunk, és hogyan érvényesítettük a tartalmi keretek leírásában a számítógép-alapú tesztelési környezet lehetőségeit és kihívásait.

1.1. Fejlemények a matematikatanítás kutatásában

A matematika tanításában, miként más területeken is, a kutatók figyelme egyre korábbi életkorok fejlődésére és fejlesztésére irányul. A lemaradások, kudarcok okait gyakran az iskola előtti szakaszban vagy az első iskolaévekben lehet felfedezni, ezért mind több vizsgálat foglakozik az óvoda-iskola átmenettel és az első iskolai évek matematikatanításával. A már hagyományos számolási készségekkel kapcsolatos elemzések mellett mind nagyobb teret kapnak a számérzékkel, a számfogalom kialakulásával, illetve ezek fejlődési zavaraival kapcsolatos vizsgálatok, és az e problémákra kiemelt figyelmet fordító tanítási módszerek (*Mooney, Briggs, Fletcher, Hansen* és *McCullouch,* 2014; *Clements* és *Sarama,* 2014).

A matematika tanításával kapcsolatos kutatások fontosságát, a tudományos megalapozás igényét jelzi, hogy már négy olyan nemzetközi folyóiratot tartanak nyilván, amelyek elsősorban a matematikai neveléssel kapcsolatos cikkeket közölnek. Emellett számos általános pszichológiai és pedagógiai folyóiratban szerepelnek matematikai tárgyú írások, kifejezve ezzel azt, hogy a matematika tanulása és tanítása során megfigyelt jelenségek szélesebb körű érdeklődésre is számot tarthatnak. A matematika jelenségvilága olyan pedagógiai megfigyelések és kísérletek lebonyolításához kínál terepet, amelyek a tanulás és tanítás tudományos vizsgálatát teszik lehetővé. Jelentősen bővült az utóbbi néhány évben az a publikációs bázis, amely a kutatók és fejlesztők munkáját segíti. Ebben a kibővült szakirodalmi bázisban a következő főbb tendenciákat látjuk.

– Jelentős hangsúllyal szerepel a vizualitás, a problémamegoldást segítő rajzolás, ábrázolás.
– Számos cikk vizsgálja a matematikai gondolkodás metakognitív folyamatait (pl. fejben számolás folyamatainak tudatossága, a matematikáról alkotott tanulói és tanári [tanárjelölti] meggyőződések vizsgálata).
– A szemmozgásvizsgálatot felhasználják például a mentális számegyenes vagy a szöveges feladatok megoldásának kutatásában.
– Továbbra is lényeges a matematikai tudás hétköznapi alkalmazhatóságának vizsgálata és az úgynevezett matematikai modellek alkotása.
– Az objektív viszonyítási pontok és nemzetközi tendenciák definiálásához nélkülözhetetlenek a nemzetközi rendszerszintű mérések tapasztalatai (PISA, TIMSS).

Ugyanakkor bizonyos témák, amelyek néhány évtizede élénk párbeszédet váltottak ki, majd háttérbe szorultak, a technológia adta új lehetőségek miatt ismét fókuszba kerültek, mint a geometria területe, amely az IEA-vizsgálatok megindulásának idején az érdeklődés homlokterében volt, majd átmeneti „hanyatlás” után a dinamikus geometriai szoftvereknek köszönhetően (Geogebra, Cabri) ismét a középpontban van. A matematikai bizonyítások pszichológiai és pedagógiai hátterének témaköre, ahol a máig meghatározó publikációk a nyolcvanas-kilencvenes években születtek, egy kevésbé aktív időszak után ismét gyakrabban szerepel a konferenciákon és folyóiratokban.

Mindhárom értékelési dimenzió (szaktárgyi, alkalmazási és gondolkodási) esetén megvannak azok az „alapművek” (túl az előző kötet elméleti fejezetein), amelyek koncepcionálisan segítenek a tájékozódásban. A matematikai képességek esetében a képességek faktoranalitikus modellje (*Carroll,* 1993), a matematikai tudás alkalmazása számára a PISA mérési keretrendszere és a holland realisztikus matematikai mozgalom alapművei, a diszciplináris dimenzió esetében a nemzetközi rendszerszintű mérések (tehát a PISA mellett a TIMSS-sorozat) jól definiált területei segítik a tájékozódást.

1.2. A hazai neveléstudományi és matematikadidaktikai hagyományok

A feladatírás hazai matematikadidaktikai forrásai közül kiemeljük a főiskolai tananyagként használt jegyzetet, *C. Neményi* és *Szendrei* könyvét (1994), valamint *Török* (2009) munkáját. Mindkét műben megtalálható a matematikai szöveges feladatok többszempontú rendszerezése. A rendszerezés szempontja elsősorban matematikai, másodsorban pszichológiai. A formális, tesztelméleti, feladatírói szempontú csoportosítás nem jelenik meg ezekben a művekben, illetőleg rejtett üzenetük, a példák sokasága mutatja be az alsó tagozaton (és részben még 5–6. évfolyamon) megszokott, a matematikadidaktikai hagyományban gyökerező feladatsajátosságokat. A feladatok részeként vagy a megoldás folyamatában különféle matematikai modellek fordulnak elő: táblázatok, grafikonok, rajzok, halmazábrák.

A matematikai feladatok hazai didaktikai előzményei között szükséges megemlítenünk a sokak által egyszerűen „teszt"-nek nevezett feladatokat, amelyek elsősorban a versenytesztek bevett feladataiként ismertek. Az országszerte ismert Zrínyi Ilona Matematikaverseny, amelyre 2014-től már 2. osztálytól lehet nevezni, a zárt, öt válaszlehetőséget felmutató feladatokat használja. Sajátos a pontozási rendszer, hiszen a válaszmegtagadás 0 pontot jelent, de a helytelen válasz pontlevonással jár. Azért említjük meg ezt a versenyformát, mert az alkalmazott feladattípus és pontozási rendszer egyrészt valamilyen felkészülési stratégiát (és némi rutint) igényel, másrészt pedig igazolja, hogy a zárt feladatok nem csupán könnyű, ismeretszintű vagy rutineljárást kérő feladatok mérésére alkalmazhatók.

A matematikai szöveges feladatok neveléstudományi szempontú tipizálására egy példát nyújt *Csíkos, Szitányi* és *Kelemen* (2010), akik a számtani művelettel megoldhatóság, a műveletek száma és a feladat szövegében szerelő kulcsszavak szerepe szerint dolgoztak ki iskolai fejlesztő programot. *Vincze* (2003) kutatásának célja „a matematikai képesség" feltárása és intelligenciával való kapcsolatának vizsgálata volt. Matematikai tudást mérő tesztjei között szerepeltek egyszerű szöveges feladatok, amelyek egy-egy matematikai képesség működése mellett egyszerű fogalmak megértését és reprezentációját igényelték, valamint rejtvényjellegű és versenyfeladatok is. Rejtvényjellegű feladatokból felépülő matematikai teszttel *Kontra* (1999) a matematikai gondolkodás flexibilitását mérte. A kutatásában használt feladatok többsége belátásprobléma volt, amelyek megoldása során a megfelelő problémareprezentáció aha élménnyel jár. A szöveges feladatok mint az iskolában szerzett matematikai ismeretek és készségek alkalmazásának indikátorai alkalmasak annak mérésére, hogy a tanuló képes-e „realisztikus" választ adni egy feladat kihívására (*Csíkos,* 2003).

1.3. Feladatírói munka számítógép-alapú környezetben

A feladatírásnak gazdag szakirodalma van mind a nemzetközi (pl. *Roid* és *Haladyna,* 1982; *Nitko,* 1996), mind a hazai mezőnyben. *Nagy* (1972) módszertani kézikönyve, *Orosz* (1993) monográfiájának néhány fejezete, a *Falus* szerkesztette kutatás-módszertani tankönyv egyik fejezete (*Csapó,* 2000), a *Pedagógiai Diagnosztika* két kötete főleg magával a feladatírás technológiájával foglalkozik. *Nagy József* úttörő kezdeményezései a készségek mérése (*Nagy,* 1971, 1973) terén pedig a tesztfeladatok gazdag példatáraként szolgálnak, hasonlóan az általa irányított, a témazáró tudásszintmérő tesztek kidolgozására irányuló programban megjelent kötetekhez. Az itt következő fejezetek építenek ezekre a munkákra, ugyanakkor nem céljuk a feladatírói munka szabályainak rendszerezése. Mindamellett a példafeladatokban megjelenő szabályszerűségek, tartalmi és stiláris elemek jól segítik a technológiaalapú teszek sajátosságainak, feladattípusainak megismerését.

A hazai matematikatanítási gyakorlatban a nyílt végű feladatok dominálnak. Az elhangzó utasítás vagy kérdés alapján a tanulónak kell megkonstruálnia a választ. A válaszadás sajátos módjai jellemzőek a matematikára már az alsó tagozattól kezdve. Találkozhatunk olyan taneszközzel, amely négy vagy hat pontban tanítja meg, „hogyan kell" szöveges feladatokat megoldani. Ezek a lépések valójában önmagukban, egyesével külön is tesztelhetők, mindegyik lépést átalakítva zárt formájúra (akár alternatív választásosra), azaz a nyílt végű feladatokban szokásosan elvárt és pontozott tudáselemek diagnosztikus értékelése számos esetben megoldható zárt feladattípusok segítségével.

A zárt feladatok a nemzetközi rendszerszintű felmérésekben az 1995-ös TIMSS-mérésig kizárólagosan fordultak elő (*Csíkos* és *Vidákovich,* 2011). Ezen belül az öt válaszlehetőség közül egy helyes válasz megjelölését kérő multiple choice (szó szerinti fordításban: többszörös választás; a hazai didaktikai fogalomhasználatban: egyszeres választásos) feladattípust használta az IEA első két matematikai felmérése. Az egyszeres választásos feladatok, leggyakrabban négy vagy öt opcióval, a későbbi nemzetközi felmérésekben is teret kaptak.

A PISA 2003-as matematikai felméréséről készült elemzés szerint a vizsgált tudásszint és az alkalmazott feladattípus között nem determinisztikus, de azért határozottan kirajzolódó összefüggés mutatkozott. A zárt feladatok elsősorban a rutinszerű matematikai eljárások esetén, míg a nyílt feladatok inkább a két magasabb szint esetén fordultak elő gyakrabban. A felismert összefüggés iránya a következőképpen értelmezhető. Mivel zárt feladatok (köztük egyszeres választásos feladatok) lényegében bármely szintű tudáselem tesztelésére felhasználhatók, a feladatíró döntésén, végső soron pedig a szakértők egyetértésén múlik, hogy a magasabb szintű gondolkodási folyamatok tesztelésére milyen mértékben lehetséges vagy szükséges nyílt feladatok bevonása. A nyílt végű feladatok esetében több kihívást jelent a feladat online diagnosztikus feladatbankba illesztése. Például egy esszéfeladat javítása, pontozása (a matematikai területén tipikus esszéfeladat például egy tétel bizonyítása) egyelőre számítógéppel megoldhatatlan. Ugyanakkor a már említett, a hagyományok okán nyílt formátumú aritmetikai szöveges feladatok a mért tudásterület megőrzésével átalakíthatók zárt formátumúra, és ezek már teljes egészében lehető teszik a számítógép-alapú megvalósítást: a pontozásig bezárólag.

A számítógépes környezet – a papíralapúhoz képest – lehetőségeket ad és korlátokat támaszt (*Molnár, Papp, Makay* és *Ancsin,* 2015). A tesztelés jóságmutatói szerint górcső alá véve a problémakört, a feladatok objektivitása, tárgyszerűsége egyrészt a feladat megoldása során biztosított azonos feltételek, másrészt a feladatok pontozása, javítása során megjelenő egyértelműség révén általában magasabb szinten biztosítható a számítógépes tesztelés során. Az adatfelvétel és a kiértékelés magasabb szintű objektivitása azon múlik, hogy lehetővé válik az „emberi tényező", a feladatok megírását és javítását felügyelő és megvalósító személyek közötti különbségek eliminálása (*Csapó, Molnár* és *Nagy,* 2014). Összességében a számítógépes környezeten keresztül lehetővé válik a feladatjavító munka egyszerűsítése. Ennek eklatáns példáját jelentik azok a kombinatorikai feladatok, amelyeknél az összes lehetséges megoldás felsorolása a feladat. Az ilyen feladatok javítókulcsában (a papíralapú tesztkultúrában) az összes helyes megoldás felsorolása mellett jellemzően a javító szakember számára ott szerepelt a mondat: „a sorrend tetszőleges". Könnyen belátható, hogy az objektív és gyors javítás ez esetben a számítógép-alapú tesztelés mellett szól.

A tesztelés reliabilitására, megbízhatóságára vonatkozóan ugyanazok a kihívások és kritériumok érvényesek, mint a papíralapú tesztelés során. A validitás, érvényesség számos részterülete különböző mértékű kihívásokat és lehetőségeket nyújt a számítógépes tesztfeladatokkal szemben. Kulcskérdés, hogy a matematikai tudás számítógépes tesztelése során mért tudáselemekbe „ne mérjük bele" a számítógép-használatban szerzett jártasságot. A legújabb kutatási eredmények szerint egyedül kisiskolás diákok asztali számítógéppel való mérése-értékelése kapcsán merülhet fel ez a kérdés, idősebb diákok esetén teljes mértékben kizárható (*Molnár* és *Pásztor,* 2015; *Pearson,* 2009). Ugyanakkor a technológia adta előnyöket kihasználva érvényesebbé tehetjük a tesztelés menetét azzal, ha a diákoknak lehetőséget adunk a feladatok meghallgatására, ezzel a mérés során kizárva az olvasási képességük fejlettségi szintjéből adódó teljesítménykülönbségeiket.

A papíralapon és a számítógépen megjelenő feladatok közötti azonosság és különbség megragadható a feladatkijelölés (stimulus) és a válaszok felvétele (response capture), másrészt az alkalmazott feladattípusok szerint is. Míg a papíralapú feladatok esetében a feladatkijelölés főképp statikus szöveg és kép használatára korlátozódik, addig számítógép-alapon ez történhet statikus vagy digitális szöveggel (hiperlinkek használatával), képekkel, hanggal, animációval, videóval, szimulációkkal. Mindezekkel akár interakcióba is léphet a tesztet megoldó személy, aminek következtében akár dinamikusan változhat is a feladat, illetve a feladat megoldásához rendelkezésre álló információ.

A feladatokra adott válaszok felvétele is eltérő lehet a két tesztkörnyezet esetén. Míg papíralapon alapvetően karikázással, pipa vagy ikszek használatával, aláhúzással, összekötéssel, rajzolással vagy betűk, szavak, mondatok írásával adjuk meg a választ, addig számítógép-alapon a válaszadási lehetőségek egyrészt kibővülnek, másrészt az alkalmazott hardver jellegétől függően is változhatnak. Más-más válaszadási lehetőségeket rejthet egy tablet vagy egy asztali számítógép. Annak ellenére, hogy a technológiai fejlődés iránya egyértelműen a tabletek felé mutat, ahol már nincs szükség perifériás eszközök használatára, elterjedtsége miatt lényeges foglalkozni az asztali számítógépek adta válaszadási módokkal is, azaz a billentyűzet és az egér adta lehetőségekkel és a diákok, főképp a kisiskolás diákok egér- és billentyűzethasználati képességeinek fejlettségi szintjével.

Az egérrel történő válaszadás során a diákok (1) kattinthatnak űrlapelemekre (rádiógomb, jelölőnégyzet), (2) megadhatják válaszukat legördülő lista használatával, (3) kattinthatnak képekre, képek részeire, (4) szövegekre, szövegek részeire, (5) kattintással színezhetnek alakzatokat, képeket vagy azok részeit, (6) a kattintás sorrendjét alapul véve sorszámozhatnak, (7) összeköthetnek vagy nyilat rajzolhatnak két feladatelem közé, (8) vonszolással mozgathatnak betűket, szavakat, mondatokat, szövegeket, számokat, alakzatokat, képeket, hangokat, videókat, animációkat, szimulációkat, gyakorlatilag bármely feladatelemet. A billentyűzet használatát kérő válaszadási formák között szerepelhetnek betűk, számok, szavak begépelését kérő beviteli mezők vagy hosszabb szövegek, mondatok begépelését kérő szövegdobozok, sőt akár bizonyos billentyűk ütemre történő lenyomásával ritmust adhatnak vissza. Mindezen túl mikrofon vagy videokamera használatával lehetőség van hang, esetleg videó (mozgás) mint válasz rendszerbe való feltöltésére is.

A jelen kötetben bemutatott elméleti kereteken nyugvó, eDia rendszerben futó matematika-feladatbankban is kihasználtuk a fenti lehetőségeket, aminek következtében a korábbiaknál változatosabb feladatformák alkalmazására nyílt lehetőség. Első, második és harmadik évfolyamon a feladatok utasításait nemcsak elolvashatják, hanem meg is hallgathatják a diákok, így a tesztek a még olvasni nem tudó vagy olvasási nehézségekkel küzdő diákok körében is használhatók. Ezáltal alacsonyabb évfolyamos diákoknál a matematikateszteken nyújtott teljesítményeket nem befolyásolja a tanulók olvasási képességének fejlettségi szintje, ami jelentős mértékben növeli a tesztek validitását és megbízhatóságát.

Feladattípusok szempontjából a fent ismertetett stimulusok és válaszok minden kombinációja kiközvetíthető, azonban minden egyes feladat pontozása, értékelése itemszinten visszavezethető az alternatív választás (igen-nem), valamint az egyszeres választás (pl. rádiógomb) típusú feladatokra. A válaszadás módja szerint a feladattípusok következő csoportosítási módját használhatjuk, ha a hagyományos papíralapú osztályozásból indulunk ki: zárt végű feladatok, nyílt végű feladatok.

A zárt végű feladatok közé sorolhatjuk az összes olyan válaszadási kombinációt, ahol a válaszlehetőségek valamilyen formában (betű, szöveg, szám, kép, hang, videó, szimuláció) adottak a feladat kiközvetítése során. A legismertebb formák az alternatív választásos, az egyszeres választásos, a többszörös választásos, az illesztéssel kivitelezhető, a csoportba sorolást kérő, a sorba rendezést igénylő feladatok, amelyek stimulus és válaszlehetőség jellegétől függően más-más feladatmegjelenést eredményeznek. A továbbiakban a teljesség igénye nélkül áttekintünk néhány gyakran alkalmazott feladatformát.

Az alternatív választásos feladatok során a diákoknak egy elemről kell eldönteni, hogy az például egy adott csoportba tartozik-e vagy sem, egy adott tulajdonsággal rendelkezik-e vagy sem, igaz-e rá a feladatban megfogalmazott állítás vagy sem. Ez a tipikusan igaz-hamis kérdéstípusnak nevezett feladattípus a papíralapú tesztekben is gyakran előfordul, azonban alkalmazási köre a használt stimulusok miatt jelentős mértékben kitágul számítógép-alapú tesztelés esetén. A leggyakrabban alkalmazott feladatforma a rádiógomb és a felirattal ellátott rádiógomb használata, de a rádiógombok kis mérete és a feladatok változatossága miatt alkalmazhatunk akár képeket (pl. zöld pipa, piros x) vagy egyéb feladatelemeket a válaszadás során. A matematika területén például megvalósítható az iskolába lépéskor való képesség- és tudásszintmérés is, ugyanis a feladatokat ez esetben a diákok fülhallgatón keresztül hallgathatják meg. Kisiskolás diákok esetén a feladatadás és értékelés központilag alkalmazott alámondásával és kiértékelésével (a személyes adatfelvétel alkalmazása helyett) megbízhatóbb tesztelés valósítható meg (*Csapó, Molnár* és *Nagy,* 2014).

Az egyszeres választásos feladatoknál nem kettő, hanem több feladatelemből kell egyet választani, tipikusan négy elemből egyet. Ennek a feladattípusnak a legkézenfekvőbb alkalmazási módja szintén a rádiógomb alkalmazása, ugyanakkor számítógépen a válaszadás számos más formája is alkalmazható, mint például legördülő menü használata vagy képre, a kép egy részletére kattintás.

A többszörös választásos feladatokban több elemből nemcsak egyet, hanem többet kell kiválasztani. Pontozás tekintetében ez a feladattípus visszavezethető az alternatív választásos feladatokra, ahol minden egyes elemről külön-külön dönteni kell, hogy rendelkezik-e az adott tulajdonsággal, majd ezt jelölnie is kell a diáknak; vagy egy egységként pontozzuk a feladatot, és a választási lehetőségek számától függetlenül egy pontot adunk a helyes megoldásra, figyelmen kívül hagyva azt, hogy esetleg a feladat egyik felét helyesen oldotta meg a diák. Az előbbi opció esetén lényeges az elemenkénti jelölés, miután arra a rendszer nem ad pontot, ha valamit épp a helytelen feladatadás miatt egyébként helyesen nem jelölt meg a diák (ebben az esetben üresen végigkattintgatva a tesztet nem 0%-os teljesítményt érne el a diák).

A többszörös választásos feladatok megjeleníthetők választógombbal, elemenkénti rádiógombpárok megadásával, de dolgozhatunk egyéb feladatelemekkel is (pl. képekkel), amelyeken szintén változatos válaszadási lehetőségeket alkalmazhatunk (ponttal való megjelölés, kattintással színezéssel stb.).

Illesztésen és színezésen alapuló feladatokkal megvalósítható a manipulatív válaszadás is. Tipikus illesztéses feladatok a feladatelemek vonszolására építő feladatok, ahol valamely feladatelemet ki kell egészíteni más feladatelemmel, elemekkel, vagy az egyes feladatelemeket sorrendbe kell állítani, vagy különböző szempontok szerint csoportba sorolni. Utóbbi esetben számos megoldás elfogadható (alak, nagyság, telítettség szerinti osztályozás is), amelyek mindegyikét kezeli az online rendszer. A drag-and-drop egy másik alkalmazása az egyszeres vagy többszörös választásos feladatokhoz áll közel, amikor előre adott lehetőségek közül kell választani és például egy sorozatot folytatni vagy egy másik feladatelemet kiegészíteni.

Színezés segítségével különböző típusú manipulatív feladatok szerkesztése is megvalósítható. Bármely kép, illetve kép része színezhető területnek jelölhető ki, ezáltal alkalmas a válaszadásra. A kombinatorikai típusú feladatok megoldása bármely sorrendben elfogadható.

A feladatokban a relációválasztást szintén különböző típusú feladatokkal oldhatjuk meg. Alkalmazhatunk csoportokba sorolt rádiógombokat vagy kattintással jelölést, színezést, vonszolást, vagy kattintással nyíl rajzolását. A billentyűzet segítségével relációs jeleket, betűket, számokat, szavakat vagy mondatokat, esetleg formulákat kérhetünk a nyílt végű feladatokban válaszként a diákoktól (a billentyűzetkezelési készségek fejlettségi szintjének befolyásoló hatását kiküszöbölve utóbbi alkalmazása kisiskolás diákok körében nem ajánlott *Molnár* és *Pásztor,* 2015). A válasz kiértékelése kapcsán meghatározhatjuk, hogy számítson-e a kis és nagybetű, az ékezet, vagy a plusz szóközök írása. Felsorolás, sorozatok vagy kombinatorikai feladatok esetén e választípus használata során definiálható, hogy lényeges-e az előre meghatározott elválasztójelekkel felsorolt betűk, szavak, számok sorrendje vagy sem. Ezekkel a megoldásokkal a nyílt végű feladattípusok jelentős része automatikusan értékelhetővé válik, azaz nem szükséges azok utólagos ember általi javítása, és megvalósítható a tesztelés végén az automatikus és azonnali visszacsatolás.

1.4. A számítógépes tesztelési környezet

A számítógépes oktatási környezet mind természetesebbé válik világszerte, így egyre nagyobb mértékben felhasználható a technológia adta környezet előnye pedagógiai értékelési célokra is. A legfontosabb értékek közé tartozik a tesztelés gazdaságossága, a tesztszerkesztés változatossága, a kiközvetítés és adatáramlás gyorsasága, az azonnali, objektív, standardizált visszacsatolás biztosításának lehetősége és az innovatív feladatszerkesztési lehetőségek. Elérhetővé válik az adaptív tesztalgoritmus, amelynek segítségével pontosabbá válik a tudás- és képességszintbecslés. Javulhatnak a tesztek jóságmutatói, bővül a tesztelésbe bevonhatók köre, és lehetővé válik a kontextuális adatok hatékony rögzítése és elemzése is.

A számítógépes tesztelési környezet alkalmazásával már nemcsak a diákok számára kis téttel bíró teszteknél, mint például a jelen keretrendszerre is épülő eDia diagnosztikus mérés-értékelési rendszer esetében vagy a nemzetközi szinten is ismert és közismert OECD PISA-mérések során találkozhatunk, hanem már nagy téttel bíró tesztek kapcsán is (pl. SAT – amerikai érettségi vizsga vagy a grúz érettségi vizsga) jelen van. A kérdés ma már nem az, hogy megvalósítható-e, elterjeszthető-e (*Molnár* és *Pásztor-Kovács,* 2015; *Molnár* és *Magyar,* 2015), megbízhatóbb-e (*Csapó, Molnár* és *Nagy,* 2014), pontosabb képességszintbecslést nyújt-e a számítógép-alapú tesztelés, hanem az, hogy hogyan integráljuk a mindennapi tanulási-tanítási folyamatba. A kutatók és a fejlesztők ma már azokra a kérdésre keresik a választ, hogy hogyan használjuk ki minél hatékonyabban előnyeit, milyen új információhoz juthatunk a tesztelt személy kapcsán az adatfelvétel során rögzített log-adatok (pl. az egyes feladatokkal eltöltött idő) segítségével. Ilyen kérdésekre a hagyományos tesztelési mód alkalmazása mellett nem tudtunk választ adni.

A technológia gyors fejlődése és terjedése következtében azok a mérés-értékelési platformok képesek lépést tartani a változással, amelyek nem igényelnek speciális követelményeket, az átlagoson, mindenhol hozzáférhetőn túlmutató szoftveres környezetet, ugyanakkor képesek az innovatív, a technológia adta előnyöket kihasználó feladattípusok kezelésére is, mindezt a hálózati sávszélesség különbözősségét kiküszöbölve. Használatuk igazodik a gyengébb és az erősebb hardveres, illetve technológiai környezethez is, miközben alkalmazásuk során biztosított a megfelelő szintű adatáramlási biztonság.

Az SZTE Oktatáselméleti Kutatócsoport által kidolgozott és folyamatosan fejlesztett platform és rendszer, az eDia megfelel a fenti követelményrendszernek. Használata nem igényel speciális hardveres vagy szoftveres környezetet, alkalmazásához mindössze egy internetes böngésző (Mozilla Firefox vagy Google Chrome) és internetkapcsolat szükséges. Az eDia nemcsak egy mérés-értékelési platform, hanem egy tartalommal feltöltött rendszer.

Az eDia rendszer közel 7000, elsőtől hatodik évfolyamos diákok részére készült matematikafeladatot tartalmaz, mely feladatok elméleti alapjául e tartalmi keretek szolgáltak. A feladatok instrukciói első, második és harmadik évfolyamon meghallgathatóak, amivel egyrészt sikerült kiküszöbölni azt, hogy a matematikatudás értékelése során a diákok olvasási képességének fejlettségi szintjét mérjük, másrészt ki tudtuk bővíteni a tesztelésbe bevonható diákok körét, mert a feladatok jelen formájukban a még olvasni nem tudó vagy olvasási nehézségekkel küzdő diákok körében is használhatók (*Molnár,* 2015b).

Az eDia rendszer alkalmazásával megvalósítható a diákok fejlődésének nyomon követése, sőt, ha elnyeri a rendszer végleges állapotát, akkor kivitelezhetővé válik az objektív viszonyítási pontokkal ellátott visszajelzés mellett a személyre szabott tesztelés is (*Molnár,* 2015a). Jelenleg a diákok a számukra kiközvetített teszt utolsó feladatának megoldása után visszacsatolásként grafikus környezetben megismerhetik képességszintjüket, miközben viszonyítási pontként látják az azonos évfolyamra járó többi diák átlagos képességszintjét, azaz el tudják helyezni magukat képességszint szerint kortársaik között. A pedagógus ezen túl a rendszeren belül ismerheti az osztály-, az iskola- és a tankerületszintű átlagos eredményeket is, amelyek további viszonyítási pontként szolgálhatnak a diákok fejlesztéséhez. Ezekkel a minőségi oktatás alapját képező kulcsfontosságú információkkal azonnali visszacsatolás mellett jelen pillanatban nem rendelkeznek a pedagógusok. Bár az intézményi és nem diákszintű értékelésre fokuszáló Országos kompetenciamérés eredményei hasonló információt szolgáltatnak a pedagógusok számára, de a hét hónapos visszacsatolási idő miatt azokra az eredményekre nem lehet a diákok hatékony fejlesztését építeni. Arra számítunk, hogy a gyors és objektív viszonyítási pontokkal ellátott, bármilyen gyakran alkalmazható online diagnosztikus értékelési rendszer, az eDia segíteni fogja a tanulási nehézségek korai azonosítását, és ezáltal segíti az oktatás minőségének javítását.

Az eDia rendszer szervesen illeszkedik a magyar és nemzetközi értékelési rendszerbe. Az eDia rendszer elsőtől hatodik évfolyamig tét nélkül folyamatos visszacsatolást biztosít a diákok matematikatudásának a matematikatudás három dimenzióján (gondolkodási, tantárgyi és alkalmazási) belüli fejlődéséről. Az eredmények a mérési azonosító használata következtében összekapcsolhatóak lesznek a hatodik, nyolcadik és tizedik évfolyamon zajló Országos kompetenciamérés matematika eredményeivel, majd a középiskolát lezáró matematikaérettségi eredményeivel is. Ezen átfogó rendszer segítségével remélhetően sikerül visszafordítani azt a matematika terén tapasztalható tendenciát, mely szerint a 15 éves diákjaink közel 30%-a analfabétának tekinthető a matematika terén, azaz alapvető matematikai műveletek elvégzésének módját sem ismerik (a PISA-felméréseken 2-es szint alatt teljesítenek).

1.5. Irodalom

C. Neményi Eszter és Szendrei Julianna (1997): *Szöveges feladatok. Matematika tantárgypedagógiai füzetek.* Budapesti Tanítóképző Főiskola.

Clements, D. H. és Sarama, J. (2014): *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach.* Routledge, New York.

Csapó Benő (2000): Tudásszintmérő tesztek. In: Falus Iván (szerk.): A pedagógiai kutatás módszerei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 277–316.

Csapó, B., Molnár, Gy. és Nagy, J. (2014): Computer-based assessment of school readiness and early reasoning. *Journal of Educational Psychology,* **106.** 2. sz. 639–650.

Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10–11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia,* **103.** 1. sz. 35–55.

Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia,* **110.** 2. sz. 149–166.

Csíkos Csaba és Lieven Verschaffel (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–97.

Kontra József (1999): A gondolkodás flexibilitása és a matematikai teljesítmény. *Magyar Pedagógia,* **99.** 2. sz. 141–155.

Molnár Gyöngyvér, Papp Zoltán, Makay Géza és Ancsin Gábor (2015): *eDia 2.3 Online mérési platform – feladatfelviteli kézikönyv.* SZTE Oktatáselméleti Kutatócsoport, Szeged.

Molnár Gyöngyvér (2015a): *A képességmérés dilemmái: a diagnosztikus mérések (eDia) szerepe és helye a magyar közoktatásban*. Géniusz Műhely Kiadványok. 2. sz. 16–29.

Molnár Gyöngyvér (2015b): Az óvoda és iskola feladatai az értelmi képességek fejlesztése terén. In: Kónyáné Tóth Mária és Molnár Csaba (szerk.): *Tartalmi és szervezeti változások a köznevelésben.* Suliszerviz Oktatási és Szakértői Iroda, Suliszerviz Pedagógiai Intézet, Debrecen. 179–190.

Molnár Gyöngyvér és Magyar Andrea (2015): A számítógép alapú tesztelés elfogadottsága pedagógusok és diákok körében. *Magyar Pedagógia,* **115.** 1. sz. 49–66.

Molnár Gyöngyvér és Pásztor Attila (2015): A számítógép alapú mérések megvalósíthatósága kisiskolás diákok körében: első évfolyamos diákok egér- és billentyűzet-használati képességeinek fejlettségi szintje. *Magyar Pedagógia,* **115.** 3. sz. 237–252.

Molnár Gyöngyvér és Pásztor-Kovács Anita (2015): A számítógépes vizsgáztatás infrastrukturális kérdései: az iskolák eszközparkjának helyzete és a változás tendenciái. *Iskolakultúra*, **25.** 4. sz. 49–61.

Nitko, A. J. (1996): *Educational assessment of students*. Prentice Hall, Englewood, NJ.

Nunes, Terezinha és Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.

Wang, H. és Shin, C. D. (2009): Computer-based and paper-pencil test comparability studies. *Test, Measurement and Research Services, Bulletin,* **9.** 1–6.

Robitaille, D. F. és Garden, R. A. (1989): *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics*. Pergamon Press, Oxford.

Roid, G. H. és Haladyna, T. M. (1982): *A technology for test-item writing*. Academic Press, New York.

Szendrei Julianna és Szendrei Mária (2011): A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 99–139.

Török Tamás (2009): *Szöveges feladatok és tanításuk. Tanítói kézikönyv, általános iskola 1-4. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Vincze Szilvia (2003): A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával. *Magyar Pedagógia,* **103.** 2. sz. 229–261.

2.

A matematikai gondolkodás diagnosztikus értékelése

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Józsa Krisztián
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Lajos Józsefné
Oktatási Hivatal

Szitányi Judit
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

Zsinkó Erzsébet
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

A matematikai gondolkodás diagnosztikus értékelése során a *Nunes* és *Csapó* (2011) által kifejtett elméleti alapokra építve, az iskolai matematikatanítás gyakorlatához alkalmazkodva és a NAT-követelmények figyelembevételével járunk el. E három kiindulópont közül a középső, azaz az iskolai gyakorlathoz alkalmazkodás igényel előzetes értelmezést. A matematika, miként a többi iskolai tantárgy, a tartalomba ágyazott képességfejlesztés terepe lehet. Ez azt jelenti (*Csapó,* 2003), hogy az adott tantárgy hagyományos tananyához illeszkedően megvalósítható a gondolkodás általános, széles tartalmi körben transzferálható képességeinek fejlesztése. Melyek azok az általános gondolkodási képességek, amelyek matematikai tartalmakon is fejleszthetők, és amelyeknél ezzel együtt teljesül a matematikai tartalmakhoz kapcsolódás gyakorlati kritériuma? *Carroll* (1998) megnevezett számos olyan képességet, amelyek egy átfogó intelligenciamodell faktoraiként jelentkeznek, azonban ezek között több olyan van, amelynek az elnevezése (és ezzel együtt maga a képesség) nehezen egyeztethető össze a tantárgyi hagyományokkal. Ilyen például az átfogó auditív észlelés képessége, amelynek tartalma – mint látjuk *Dehaene* hármaskód-elméletéből (*Dehaene, Piazza, Pinel* és *Cohen,* 2003; *Dehaene, Molko, Cohen* és *Wilson,* 2004) – a számnevek hallás utáni percepciója kapcsán nyilvánvalóan fontos eleme a matematikai tudásnak.

Definiálható ugyanakkor néhány olyan átfogó gondolkodási képesség, amelyek nemcsak hogy releváns és azonnal látható matematikai kötődésűek, hanem ezen túl más tantárgyak fejlesztő feladataiban szerepeltetve megmutatják a matematikai(nak is nevezhető) képességek széleskörű jelentőségét. *Vidákovich* (2008a) áttekintése nyomán kiemelt matematikai képességként tekintünk az induktív, deduktív, kombinatív, rendszerezési és korrelatív gondolkodásra. Ezek közül a kombinatív és a korrelatív gondolkodás direkt módon illeszkedik egy-egy részterülethez (a kombinatorikához és a statisztikához), míg a többi átfogóbban kapcsolódik a matematikához. Az induktív gondolkodás fogalmát a *Csapó Benő* kutatásaiban (pl. *Csapó,* 2002) mért folyamatokhoz kapcsoljuk: szabályfelismerést és szabályalkotást igénylő számsorozatok és más jelsorozatok folytatásával, kiegészítésével mérhetjük. Az arányossági gondolkodást (proportional reasoning) említjük még a szakirodalomban jellemzően matematikaiként definiált gondolkodási képességek között, amelynek egyrészt az induktív gondolkodáshoz való kötődése említésre méltó (*Schwartz* és *Moore,* 1998), másrészt kapcsolódása a valós világ modellezéséhez, mely átvezet minket a matematikai tudás alkalmazási dimenziójába.

Emellett számos olyan készség definiálható, amelyek – a készségek *Nagy József* (2000) által adott definíciójának megfelelően – egy szűkebb tartalmi területen a gondolkodás automatizálódott formáit jelentik. Szerencsés és optimális esetben készségszinten működik a számolás, a számlálás, az arányossági gondolkodás és a mértékváltás. Figyelembe véve a készségek és képességek fejlődésének jellemzően tartalomhoz kötött fejlődési útját (*Perkins* és *Salomon,* 1989), a készségek egy részét a matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése során fogjuk tárgyalni. Egy adott területen megszerzett készség más tartalmi területre transzferálódása nem automatikus folyamat, viszont oktatási módszerekkel elősegíthető.

Fejezetünkben öt matematikai gondolkodási képességre fokuszálunk (emellett más képesség- és készségelemekből is néhány példát említünk), hangsúlyozva azonban, hogy nincs véges, különösen nem ötelemű listája a matematikai képességeknek. Az online diagnosztikus értékelési projektben a deduktív, induktív, rendszerező, kombinatív és arányossági gondolkodást emeltük ki.

Deduktív gondolkodás

A logikus gondolkodás része a deduktív gondolkodás, amelyet a klasszikus kétértékű logika kétváltozós műveleteire épülő feladatokkal szoktak mérni. Ebben a rendszerben a kijelentés, vagyis modalitás szempontjából a kijelentő, állító mondat az alapegység, amelynek igazságértéke lehet igaz vagy hamis. A kétváltozós műveletekben két állítás összekapcsolásával képzünk összetett kijelentéseket, amiknek az igazságértéke szintén lehet igaz vagy hamis. A deduktív gondolkodást mérő feladatokban tíz műveletet mérünk, amelyeket valódi kétváltozós műveleteknek nevezünk. A logikus gondolkodás fejlesztése régóta megfogalmazott igénye az iskolai tanterveknek (*Vidákovich,* 2002).

A 2012-es Nemzeti alaptanterv matematikai műveltségterület részében 1–6. évfolyamra vonatkoztatva olvasható: „Az állítások megítélése igazságértékük szerint. Nyitott mondatok bezárása helyettesítéssel. Oksági kapcsolatok keresése, megértése. Következtetés további igazságokra." (NAT, 2012. 67–68. o.) A deduktív gondolkodás fejlődésének egy jelentős szakasza már óvodáskorban lezárul, hiszen az óvodások már többféle következtetési típust képesek használni (*Vidákovich,* 2008b). 1–2. évfolyamon a deduktív gondolkodás vizsgálatára rendelkezésre áll a DIFER vonatkozó modulja, melynek felvételét szóbeli feladatkitűzés kíséri. 3–4. osztályra a tanulók olvasási képessége, valamint a nyelv logikai elemeinek a helyes használata kezdi elérni azt a fejlettségi szintet, hogy lehetővé válhat deduktív gondolkodást mérő matematikai szöveges feladatok megoldása.

Induktív gondolkodás

A gondolkodási műveletek közül az induktív gondolkodás egy olyan komplex kognitív képesség, melyet úgy is értelmeznek mint a kritikai gondolkodás egyik alapvető összetevőjét (*Sternberg,* 1985) vagy mint a tanulási képességek egyikét (*Csapó,* 1997). A fogalom definíciója szerint az induktív gondolkodás nem más, mint szabályszerűségek és rendellenességek megtalálása úgy, hogy relációkat, tulajdonságokat összevetve keresünk és ismerünk fel hasonlóságokat és különbségeket. Az induktív gondolkodás lényege tehát tulajdonképpen az összehasonlítási feladatokban ragadható meg: dolgok jegyeinek hasonlóságát vagy különbözőségét kell azonosítani, az egymáshoz való viszonyokat felismerni (*Csapó,* 2002, 2004). Nagymintás keresztmetszeti vizsgálatok (*Molnár* és *Csapó,* 2011; *Csapó* és *Molnár,* 2012) és fejlesztő kísérletek (*Molnár,* 2011) segítségével bőséges adataink vannak a kisiskolás korosztály induktív gondolkodásának fejlődéséről és fejleszthetőségéről.

Az induktív gondolkodást mérő feladatok fejlesztik a divergens gondolkodást, hiszen nem minden esetben csak egy úton juthat el a tanuló a jó megoldáshoz. Továbbá a feladatok megbeszélése, a gondolkodás verbalizálása fejlesztheti a kommunikációs készséget, a problémamegoldó és deduktív gondolkodást.

Rendszerezőképesség

A gondolkodási képesség egyik összetevője a rendszerezőképesség, amely „a dolgok és viszonyaik, illetve a meglévő információk és viszonyaik (relációik) felismerésével, elrendezésével teszi lehetővé az új tudás létrehozását" (*Nagy,* 2003, 271. o). A rendszerezőképesség összetevőit az alábbi öt készségben határozhatjuk meg. (1) A fogalomképzés egyszerű fogalmak megalkotásában, kialakításában játszik szerepet. (2) A besorolókészség segít eldönteni egy adott dologról, hogy a kiválasztott fogalomhoz tartozik vagy sem. (3) A definiálókészség nyolcfajta definíció létrehozását teszi lehetővé, általa a dolgokat fogalmi szinten tudjuk azonosítani. (4) A sorképzés az elemek valamilyen szempont szerinti sorba rendezését segíti. (5) Az osztályozás az összetett fogalmak konstruálásában, működtetésében játszik szerepet, aminek három fajtáját különböztetjük meg, a felosztást, a sorképző osztályozást és a hierarchikus osztályozást (*Nagy,* 2003). Ahogy fentebb említettük, a rendszerezőképesség egyik részkészsége a sorképzés, amelyhez szinte minden tantárgyból lehet feladatokat alkotni. Sorképzéskor tehát a felsorolt elemeket valamilyen szempont szerint sorba kell rendezni a tanulónak. A matematikán belül számos lehetőség nyílik ilyenfajta viszonyfelismerést igénylő feladatok alkalmazására.

Kombinatív képesség

A kombinatív képesség az a gondolkodási képesség, amely lehetővé teszi, hogy megadott elemekből meghatározott feltételeknek megfelelően konstrukciókat tudjunk összeállítani (*Csapó,* 1988). A gyermekek már óvodáskorban találkozhatnak olyan tevékenységekkel, melyek matematikai hátterében ismétlés nélküli kombináció áll. Ilyenek például színezéses feladatok, a kétszínű zászló sávjainak különböző színre festése, amihez három színből választhat a gyermek. Az ilyen és ezekhez hasonló feladatokban az ismétlés nélküli kombinálást tudjuk mérni, ami a kombinatív képesség kevésbé bonyolult szintje. Ebben az életszakaszban még nem az bír jelentőséggel, hogy összesen hány különféle lehetőség van, hanem egyáltalán a lehetőségek keresése, egy újabb, az addig feltártaktól különböző lehetőség megtalálása jelenti a tevékenység lényegét, a kihívást (*Csíkos* és *Csapó,* 2011). A 2012-es Nemzeti alaptanterv 1–4. évfolyamra kombinatorikából néhány elem sorba rendezését, a lehetőségek próbálgatással való megtalálását fogalmazza meg. 4. osztály végére már a kombinatív képesség minden elemét mérjük, az ismétlés nélküli és ismétléses kombinálást és az ismétlés nélküli és ismétléses variálást. Ezekhez a feladatokhoz kezdetben manipuláció kapcsolódik (színezés, rakosgatás), mely megalapozza a későbbi szimbólumokkal, számokkal végzendő tevékenységet.

Arányossági gondolkodás

Az arányossági gondolkodás alapja annak megértése, hogy két mennyiség együttesen változik (*Adey* és *Csapó,* 2011). Bár matematikai szempontból a lineáris összefüggések egyszerűnek hatnak, ezek felismerése és megértése is hosszú fejlődési folyamat eredménye, és az arányossági gondolkodás az analógiás és induktív gondolkodás más folyamataival együtt, sokféle tartalmon előfordulva fejlődik. Az arányossági gondolkodásra mind a hétköznapi élet, mind az iskolai tanulás során szükség van, fontos pillérét képezi a tudásnak. Arányosságszámítási készségnek nevezzük az arányos osztást, az arányszámítást, a mértékváltást, az arányosságok kezelését, a százalékszámítást. Az arányosságszámításnak fontos előfeltétel-készségei vannak, mint az elemi számolás, műveleti számolás és a törtek fogalma (*Varga, Józsa* és *Pap-Szigeti,* 2007). A Nemzeti alaptanterv (2012) alsó tagozatra az arányossági gondolkodásnak ezeket az előfeltétel-készségeit veszi számba, és csak 5. évfolyamtól kezdődően jelenik meg az egyenes arányosság és a fordított arányosság. Az arányossági gondolkodásnak a legegyszerűbb, tapasztalati formája már óvodáskorban kezd kialakulni. Az általános iskolai oktatás során gyakran előkerülnek a rész-egész fogalmai, viszonyai, az egész bizonyos részeinek színezése különböző geometriai alakzatokon, az első mértékegységek. Az arányossági gondolkodás fejlődése lassú folyamat, és nagy egyéni különbségeket mutat. A tanítási tapasztalatok azt jelzik, hogy az arányokkal való műveletvégzéshez nem feltétlenül kapcsolódik arányossági gondolkodás, hiszen bizonyos feladatok más algoritmussal is megoldhatóak. Ezért is kiemelkedő fontosságú az arányossági gondolkodás és az előfeltétel-készségek fejlesztése, ehhez pedig olyan feladatok szükségesek, melyek a tanulók képességét mérik arányossági gondolkodást igénylő helyzetekben (*Varga, Józsa* és *Pap-Szigeti,* 2007).

Ha a gondolkodási képességek iménti áttekintését azzal a céllal vennénk sorra, hogy az iskolai évfolyamok szerint melyiknek „mikor jön el az ideje", a számolási készség korai kitüntetett szerepe elvitathatatlan. Az is nyilvánvaló, hogy a deduktív gondolkodás fejlődéséhez alapvető logikai kötőszavak egy része is már jól ismert és megfelelően használt a kisiskolás korosztályban is (*Vidákovich,* 2002). Más készségek és képességek viszont későbbi évfolyamokon jutnak főszerephez, így pl. a mértékváltás készségének fejlődésében az alsó tagozat végéig maradnak tartalékok, az arányossági és kombinatív gondolkodás fejlődése is felsőbb évfolyamokon gyorsul föl. Valamennyi készség és képesség fejlődésének menetére jellemző ugyanakkor a több évre elnyújtott, lassan induló, majd fölgyorsuló, végül a plafoneffektus hatására lelassuló fejlődésmenet (*Molnár* és *Csapó,* 2003). Ennek a fejlődésmenetnek a támogatásához a taneszközök és az oktatási módszerek jelentős átalakítása szükséges. Másképpen fogalmazva: ha valódi célként jelenik meg egy készség- vagy képességjellegű tudáselem fejlesztése, akkor a matematikán belül is, de más tantárgyakban is hosszabb időn keresztül, ismétlődő gyakorlással remélhető a megfelelő fejlesztő hatás.

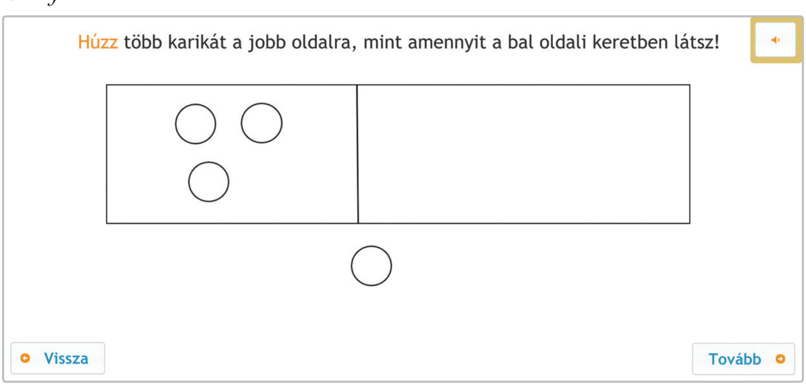
2.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

2.1.1. Számok, műveletek, algebra

Az alsó tagozatos fejlesztés során a jól megtervezett konkrét cselekvő tevékenységekből, a diákok által megtapasztalt valóságból kiindulva, a valóságot bemutató vizuális, audiovizuális ábrázolásokon át jutunk el az absztraktabb rajzos, verbális, végül a jelekkel, szimbólumokkal való megfogalmazásokig. A valóság, a fogalom és a szimbólum (jel) helyes összhangba hozása, egymásnak való kölcsönös megfeleltetése sok-sok tevékenységgel történik. Már az óvodáskorban elkezdődik annak a képességrendszernek a fejlesztése, amelyet az egész számok értő használata jelez. Az egész számok mint matematikai gondolkodáselem a megfelelő szintű fejlettségnek egyik feltétele, ha az iskolába lépő tanuló számára világos, hogy nagyobb mennyiséget nagyobb szám reprezentál.

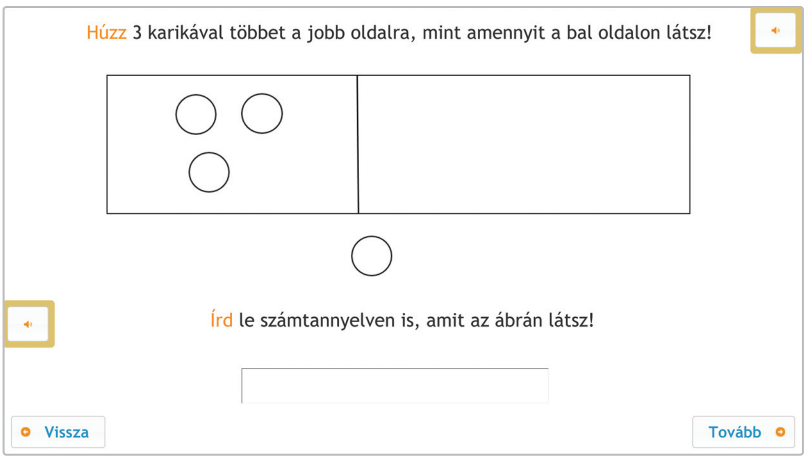
A következő feladat már óvodáskorban is megoldható (feltételezve, hogy a jobb és bal oldalak fogalmát már érti a gyermek), és egyúttal láthatjuk az online értékelésnek azt a tulajdonságát, amelyet a feladatkitűzés dinamikus elemei jelentenek. Ahogyan a bevezető fejezetben említettük, a tanulók számára nem okoz gondot a dinamikus feladatelemek kezelése. Jelen esetben a téglalapok alatt található kört kell a „fogd és vidd” módszer többszöri használatával a jobb oldali téglalap fölé húzni, ahol az minden egyes egérhúzás után újabb képként ott marad. Amikor a tanuló úgy érzi, hogy már több karika van a jobb oldalon, a „Következő” gombra kattintva jelzi, hogy készen van a feladat. A *G1. feladatban* a több-kevesebb reláció biztos tudását mérjük.

G1. feladat



Az első osztályban kiegészítjük az előző feladat utasítását, vagyis nem egyszerűen több karikát, hanem pontosan 3-mal (vagy más egyjegyű számmal) több karikát kérünk a jobb oldalra *(G2. feladat)*. Emellett egy nyílt végű feladatrész is megjelenik, amelyben szövegként, billentyűzetről kell a tanulóknak bevinniük a képen látható mennyiségek közötti összefüggést. Több jó megoldás lehetséges, így a 3 + 3 + 3 = 9 vagy a 3 + 6 = 9, sőt akár a 3 + 3 = 6 is megfelelő.

G2. feladat



Második osztályban tovább bővül ugyanehhez az alapfeladat-ötlethez kapcsolódóan a tevékenységek matematikai tartalma:

1. *Rajzolj annyi kört a jobb oldalra, hogy az ábrán összesen 18 kört lássunk!*
2. *Írj összeadásokat, kivonásokat az ábráról! (Megoldás: 18 – 3 = 15; 3 + 3 + 12 = 18; 15 – 3 = 12; stb.)*
3. *Piros színnel kerítsd körül úgy a köröket, hogy minden kerítésen belül ugyanannyi kör legyen! (*Megoldás*: 1 × 18 kör vagy 2 × 9 kör vagy 3 × 6 kör vagy 6 × 3 kör vagy 9 × 2 kör vagy 18 × 1 kör.)*

A közös élmények, tapasztalatok, az együtt végzett matematikai tevékenységek egyfajta közös hivatkozási alapot jelentenek egy osztály/csoport számára. Ez a hivatkozási alap minél gazdagabb, annál biztosabb, hogy a később elhangzó kérdések, állítások, egyéb megfogalmazások során minden tanulónál ugyanazt a képzetet, cselekvéssort, emléket, gondolatot hívjuk elő. A jelenség, amelyet *Csíkos* és *Verschaffel* (2011) a Brousseau-i didaktikai egyezmény kapcsán tárgyal, az osztályközösségek közös, íratlan szabályrendszerének létrejöttével aposztrofálható, egy szükséges fázis a matematikai tudás fejlődésében. Ugyanakkor a didaktikai egyezmény szabályai az iskoláztatás évei alatt változhatnak, adaptívvá, rugalmassá válhatnak.

Számok

Az óvodából érkező gyermekeknek friss emlékeik vannak arról, hogy tárgyakat, képeket hasonlítottak össze, tulajdonságokat vizsgáltak, kapcsolatokat kerestek, viszonyokat próbáltak megfogalmazni az óvodában végzett tevékenységeik alatt. Az iskolában folytatódnak a jól előkészített és változatos tevékenységek, tudatosulnak a fogalmak tartalmi jegyei. A tanulók ezáltal megértik és jól alkalmazzák a több-kevesebb (pl. kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésekkel), ugyanannyi (pl. párba állításokkal, mely párosítás e kapcsolat értő kialakításának módszere), kisebb-nagyobb, hosszabb-rövidebb, illetve magasabb-alacsonyabb (pl. összemérésekkel), stb. relációkat. A relációkhoz kapcsolódó jeleket (>; <; = szimbólumokat) a gyermeki környezethez, a mesevilághoz kapcsolódó elnevezéssel illetik (pl. a róka szája arra nyílik, mert ott lát több tyúkot), de van, ahol a „relációs jel" megnevezést használják. Általánosságban igaz, hogy óvatosan kell bánni a matematikai kifejezések korai bevezetésével, mert előfordulhat, hogy emiatt rosszul (pl. szűkebb tartalommal) rögzülnek, s ez később hátrányt, meg nem értést okozhat a gondolkodásban. *Toluk Ucar* és *Yavuz* (2011) kutatása arról a problémáról tájékoztat, hogy az egyenlőtlenségjelek értelmezése gyakran műveletként, az egyenlőségjel értelmezéséhez hasonlóan (erre vonatkozóan ld. *Ginsburg,* 1998) fejlődik, és később nyer relációs tartalmat. A magyar matematikatanításban alkalmazott „relációs jel" kifejezés amellett, hogy kritikával illethető más szempontból, alkalmas lehet a fent említett török kutatók által jelzett, késői fejlődési út rövidítésére.

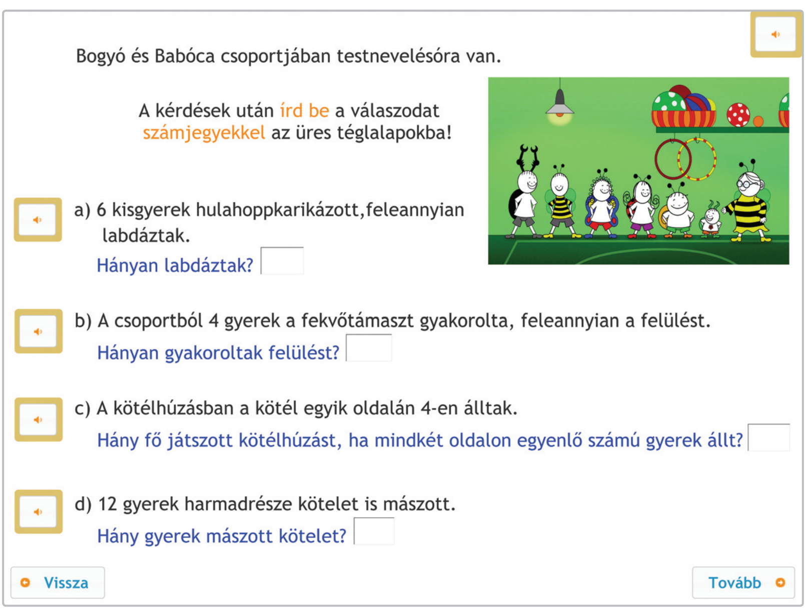
A megfigyelések, összehasonlítások sorozata képessé teszi a tanulókat a megkülönböztetést segítő lényeges tulajdonságok felismerésére, megnevezésére, fokozatos absztrahálásra. A különbségek, változások megfigyelése, megbeszélése, tudatos kiemelése egyfajta előkészítés a műveleti szimbólumok számára.

A tanulói tevékenységek között egyfajta „számlálást” jelent például a konkrét képeknek, ábráknak, rajzoknak jól választott mozgással (pl. sorozatok képzésekor felállás, leülés, különböző kéztartások), versikék szótagoló elmondásával (pl. egy elem kiválasztása „kiszámolókkal”), hangokkal (pl. dobbantás, koppantás, taps vagy akár valamely előénekelt hang) való leolvasása:

Jelöljön a ♣ egy tapsot a ♥ pedig egy lábdobbantást.
Az alábbi képet „olvassuk le” a jeleknek megfelelően!
♣ ♣ ♣ ♥ ♥ ♣ ♣ ♣ ♥ ♥ ♣ ♣ ♣ ♥ ♥ ♣ ♣ ♣ ♥ ♥
Találjatok ki mozgások, hangok segítségével különböző leolvasásokat!

Rajzos jelek és matematikai jelenségek megfeleltetésének értékelése során a papíralapú tesztelés korlátait képes meghaladni az online tesztelés legalább két szempontból. Egyrészt a számítógép képes tárolni a beérkező információ időbeliségét, és a tanuló által bevitt adatok sorrendisége is pontozható. Másrészt az adatbevitel már a billentyűzet felhasználásával is sokszínűvé tehető, és további perifériák segítségével megközelíthetjük a manipulatív, mozgásos tevékenységek gyakorlati értékelésének szintjét. A számítógép-alapú értékelés során az iménti tanulói tevékenységek átfogalmazhatók például billentyűk lenyomásával.

G3. feladat



A *G3. feladat* az egyenlő és a fél fogalmak segítségével a mennyiségek összehasonlítása képességelem mérésére alkalmas.

A számlálás ugyanazon kép vagy szám esetén is többféle módon történhet. A számfogalom kialakítását, fejlesztését általában három irányból közelítjük meg, összhangban a neuropszichológia egyik nagy hatású modelljével, az említett hármaskód-elmélettel. Az elmélet három, egymástól elkülöníthető, ám egymással szoros kapcsolatban lévő agyi területhez köti a számok mentális reprezentációját. A számjegy, a szám neve és a számmal jelzett mennyiséghez kapcsolódó belső képek, képzetek összekapcsolódása, rugalmas kapcsolatai jelentik az alapot a számoláshoz, a számláláshoz és az egyszerű aritmetikai műveletek elsajátításához.

Minden olyan feladat, amely a számok háromféle reprezentációja közötti összefüggések gyors felismerésére épít, felhasználható a számolás pszichikus struktúráinak diagnózisára. Ha a három reprezentációs szempontot páronként vizsgáljuk, a következő alapfeladatok adódnak. (1) A számjegy képének a szám nevéhez illesztése (a szám neve lehet betűvel írt vagy akár hangfájlból érkező); (2) a számjegy képének valamilyen mennyiségreprezentációhoz illesztése: például tárgyak, körök, négyzetek számosságát számjegyhez kapcsolni; és (3) a szám nevének mennyiségi reprezentációhoz kötése.

G4. feladat

A számreprezentáció egyik fontos eleme a számok párosságának eldöntése, mely tudáselem értékelését a *G4. feladat*ban látott módon összekapcsolhatjuk a rendszerezőképesség értékelésével

Műveletek

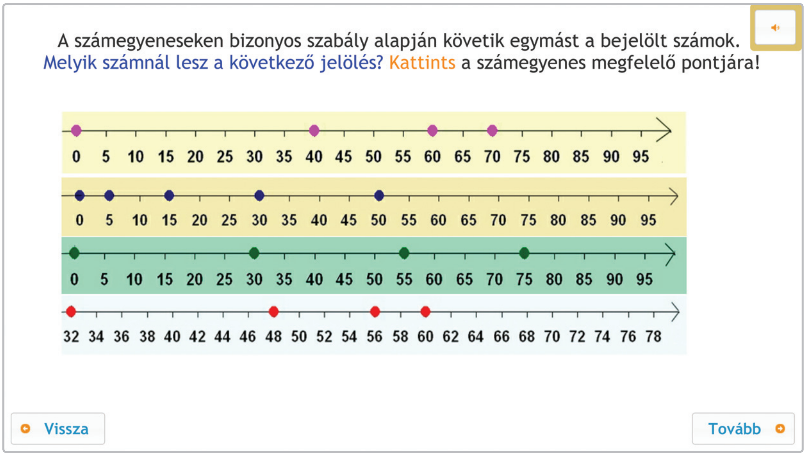
A matematikai képességrendszerben additív gondolkodásnak nevezett jelenségen belül (*Nunes* és *Csapó,* 2011) az egész számokkal végzett matematikai műveletek meghatározóak a fejlesztés és az értékelés szempontjából egyaránt. Maga az additív jelző szótárilag összeadásra utal, azonban tágabb értelemben idetartoznak a mennyiségek, számosságok összehasonlítását megvalósító tudáselemek. Ezek a tudáselemek teszik lehetővé annak megértését, hogy adott mennyiségből valamennyit elvéve, majd ugyanazt hozzátéve a kiinduló mennyiséghez jutunk.

A számfogalom fokozatos kialakítását, mélyítését szolgáló tanulói tevékenységek során előkészítjük az összeadás és a kivonás műveletének matematikai tartalmú fogalmát a számok különböző leolvasásával, az összegalakok (pl. 5 dió és 2 alma ugyanannyi darab mint 3 alma és 4 dió) és különbségalakok leolvasásával.

A pótlás, azaz valamennyit valamennyire kiegészíteni (pl. $3 + \triangle = 7$) és a bontás, azaz valamennyi két vagy több részre osztása (pl. $8 = \triangle + \triangle$) – bár tartalmilag elsősorban az összeadáshoz kapcsolódik, – matematikai hátterét tekintve valójában egy nyitott mondat megoldását jelenti. A bontás lehetővé teszi egy szám sokféle előállítását, de egy szám előállítható pótlással és elvétellel is. A 4-es szám például 1-ből, 2-ből, 3-ból pótlással, míg 5-ből, 6-ból stb. elvétellel állítható elő. A változatos kirakások, a képes, szöveges szituációk során szerzett, még jellemzően szóban megfogalmazott tapasztalatok a műveletvégzés algoritmusát is jól előkészítik. Mire megjelenik az írásbeli lejegyzés, a műveleti jelek, szimbólumok értése, alkalmazásuk biztos tudása a tanult számkörben jól megalapozott. Az első két évfolyamon elsősorban az összeadás, a kivonás fogalmát alapozzuk meg és mélyítjük fokozatosan, valamint kialakítjuk a tevékenység közben és azt követően végzett önellenőrzés igényét.

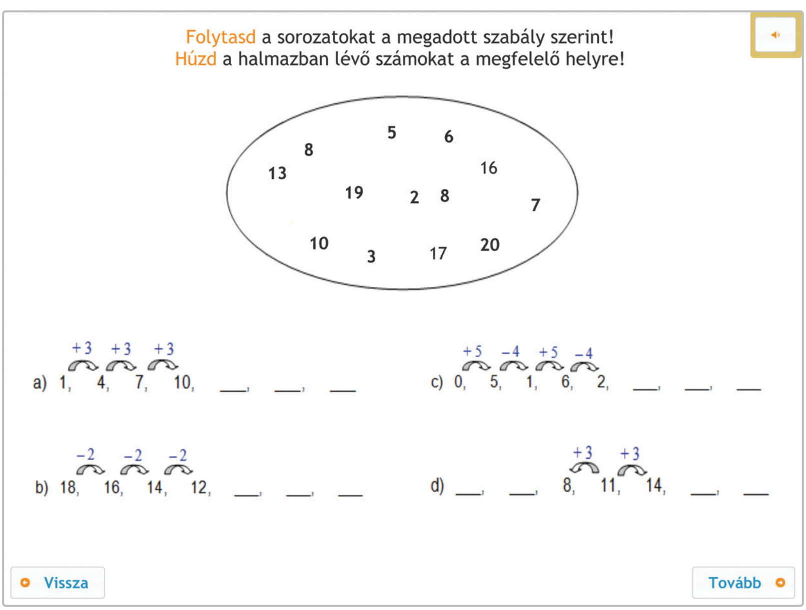
Kiemelt szerepet tulajdonítunk a számegyenes segítségével végzett műveletértelmezésnek is. Erre mutat példát az alábbi feladat *(G5. feladat).*

G5. feladat



A számegyenesen való kétirányú lépegetések összekapcsolják a műveletet és annak megfordítását. Ehhez hasonlóan nyilakkal és azok irányával tudunk hozzáadást és elvétel jelölni számsorozatokban is. A *G6. feladat*ban a nyilak jobbra mutatva a hozzáadást, balra mutatva az elvételt jelölik. Jól szemléltetik, hogy a 4-nél 3-mal nagyobb a 7, és a 10-nél 3-mal kisebb a 7.

G6. feladat



A számegyenes használatát a műveletvégzésben megalapozza a mentális számegyenesnek, azaz a fejünkben lévő képi mennyiségi reprezentációknak a kialakulása, melyben *Opfer* és *Siegler* (2007) szerint a százas számkörben a logaritmikus és a lineáris mentális számegyenes is elérhető számukra.

Tevékenységek sorával készítjük elő a szorzás (egyenlő tagok összeadása), részekre osztás (pl. megjelenítéssel, jelölés [pl. 20/4 bevezetésével]), bennfoglalás (megjelenítés, jelölés [pl. 20:4]), maradékos osztás (kirakással, maradék megjelölésével) fogalmi jellemzőit. A szorzás egyenlő tagok összeadásával, a részekre osztás és bennfoglalás képi megjelenítéssel, a maradékos osztás manipulatív tevékenységgel: kirakással, a maradékra rámutatással szemléltethető.

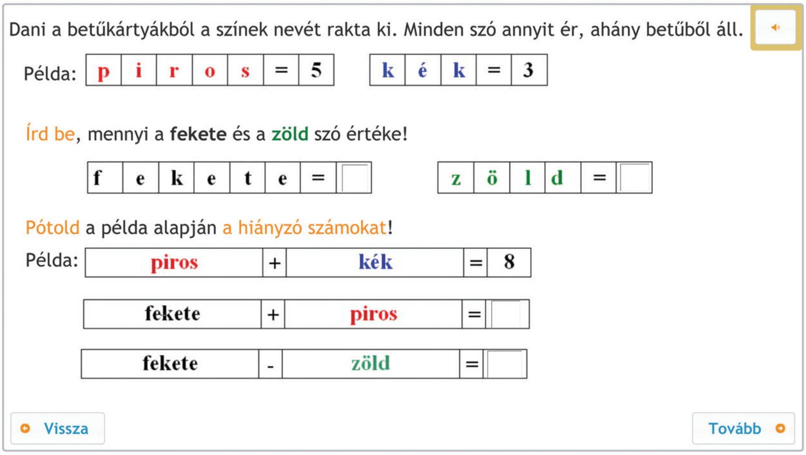
A műveletek jellemzőinek, kapcsolatainak vizsgálata során az első évfolyamon mindenekelőtt az összeadás tagjainak felcserélhetőségét, csoportosíthatóságát fedeztetjük fel a diákokkal, és kapcsolatot keresünk az összeadás és a kivonás között. A második évfolyamon a tagok változtatása és az eredmény változása közötti összefüggést, a szorzás és az osztás közötti kapcsolatot is megfigyeljük, és konkrét tárgyi tevékenységről leolvassuk a tényezők felcserélhetőségének értelmezését.

Algebra

A matematikatudomány-szempontú tartalmi felosztásban az algebrai jelek és eljárások külön egységet képeztek a Számok, számrendszerek tudásterületen. *Schliemann* és *Carraher* (2002) számos példával szemlélteti, hogy a konkrét számok felől a számok adott halmazáig és az azt jelölő algebrai kifejezésekig többféle fejlődési út lehetséges. Az iskolai gyakorlat számára ezért nem könnyű tudományosan megalapozott fejlesztési elveket megfogalmazni. *Ginsburg* (1996) esettanulmánya arra hívja föl figyelmünket, hogy a látszólag legnyilvánvalóbb, és első osztálytól széleskörűen használt egyenlőségjel megértésében jelentős fejlődésbeli lépésekre van szükség iskoláskorban. Kezdetben az egyenlőségjel a matematikai gondolkodás folyamatának azt a pontját jelenti, amikor „most az eredmény következik" ponthoz érkeztünk, és a tanulók fejében később válik mennyiségek közötti egyenlőség, majd az ekvivalencia reláció kifejezőjévé.

A *G7. feladat* ahhoz az alapvető képességhez tartozik, miszerint azonos dolgokat azonos jeleknek feleltetünk meg

G7. feladat



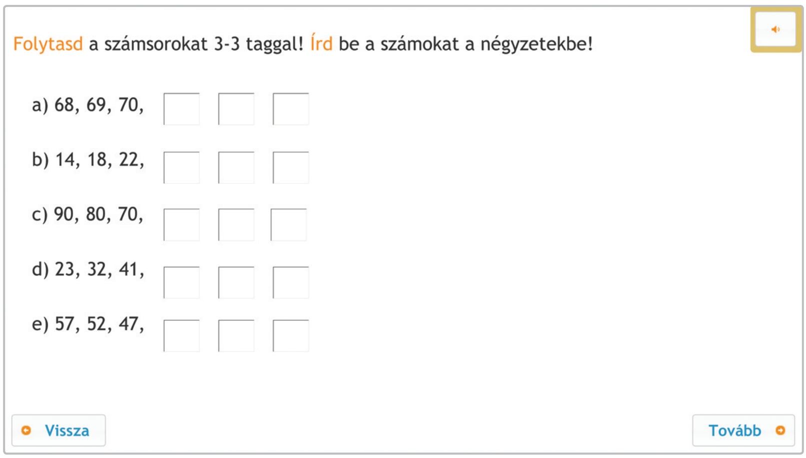
2.1.2. Relációk, függvények

A Relációk, függvények témakör kiemelt szerepet játszik egyes gondolkodási képességek fejlesztésében. A multiplikatív gondolkodás elemei között említhetjük az induktív gondolkodást, azon belül a számsorozatokat, a szám- és szóanalógiákat, amelyek a Relációk, függvények témakörhöz tartoznak. Hasonlóan, az arányossági gondolkodás fejlesztése során megjelenik az egyenes arányosság függvényként való értelmezése.

A számlálás készségének fejlesztéséhez kapcsolódóan a tanulóknak csökkenő és növekvő számsorozatokat kell tudni folytatniuk a természetes számok körében, százas számkörben. Egyenletesen változó sorozatok szabályait is föl kell ismerniük *(G8. feladat)*.

Fejlesztési cél, hogy a tanulók képesek legyenek felismerni periodikusan ismétlődő mozgásokat, követni és folytatni tudjanak megismert ritmusokat. Számsorozatok esetében elengedhetetlen annak azonosítása, hogy csökkenő, növekvő vagy periodikus sorozatról van-e szó *(G9. feladat)*.

G8. feladat

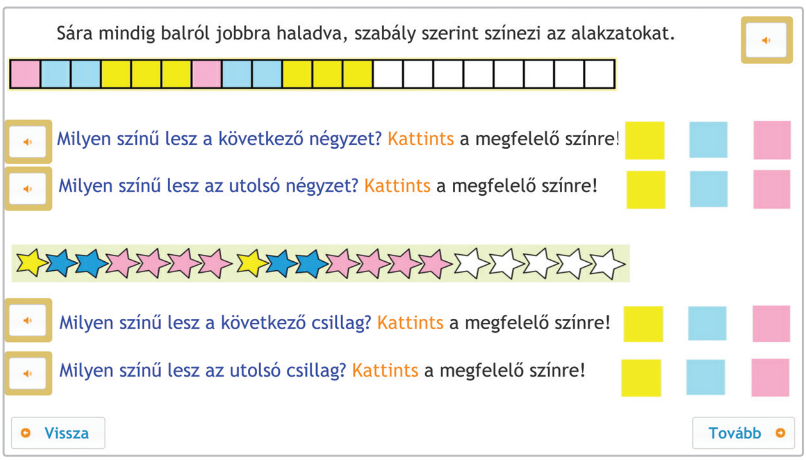


G9. feladat

Az induktív gondolkodás számsorozat-típusú feladatai kiválóan illusztrálják, hogy a diagnosztikus értékelés és a gondolkodási képességek fejlesztése összekapcsolódik. Az induktív gondolkodás során nyert következtetés két lépcsőjének egyike, a szabály megalkotása valószínűségi jellegű, míg a megalkotott szabály alapján a sorozat folytatása már egyértelműen meghatározott. Mivel a számsorozatok folytatásának diagnosztikus értékelése során a szabály leírását ritkán követeljük meg, az értékelés során olyan feladatok szerepeltetése célszerű, amelyeknél várhatóan egyféle, az adott korosztály számára optimális kihívást jelentő szabály alkotható. A képességfejlesztés során ugyanakkor mind a szabályalkotás rugalmassága és az oda vezető út megfogalmazása, mind pedig a fegyelmezett szabályalkalmazás célkitűzéssé válik.

A multiplikatív gondolkodás alkalmazási területét jelentik az olyan feladatok, amelyekben számsorozatok vagy egyéb tárgyakból, egyéb elemekből álló sorozatok vagy egy táblázat elemei közötti összefüggéseket keresünk. A tanulók induktív és deduktív gondolkodási képességeit egyaránt mérik és fejlesztik ezek a feladatok (*G10.* és *G12. feladat*). A képességfejlesztés és a megoldások elbírálása szempontjából egyaránt fontos a szabályok sokféle megfogalmazási lehetőségét megbeszélni, megvitatni, értelmezni.

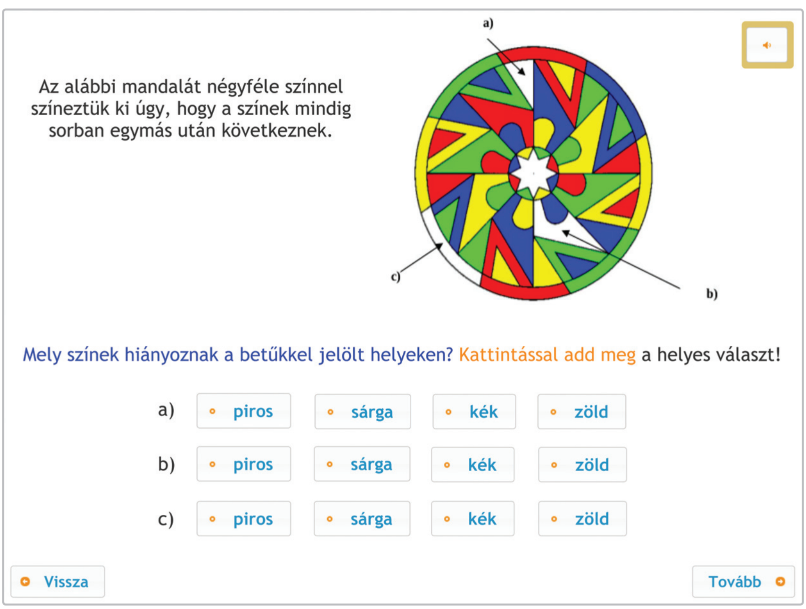
G10. feladat



Egy adott sorozat szabályának a felismerése önmagában sem mindig egyszerű feladat. Főleg akkor okozhat nehézséget, ha egyszerre több sorozat is megjelenik párhuzamosan egyetlen feladaton belül (ld. *G11.* és *G12. feladat*).

G11. feladat

G12. feladat



A *G12. feladat* nehézségét az adja, hogy az azonosan színezett alakzatok egymással átellenesen helyezkednek el. A tanulóknak képeseknek kell lenniük 2. osztály végére olyan sorozatok szabályainak megállapítására és a sorozat folytatására is, amelyben a számsorozat tagjainak különbségéből célravezető a szabály megfogalmazása. Az ilyen feladatok gyakran tehát egy újabb sorozat megalkotásán keresztül oldhatók meg. Két kérdés vetődik föl. Egyrészt az online tesztelés során használható eszközök alkalmasak-e a vázlatkészítésre, a firkálásra, a részmegoldások lejegyzésére. (Hiszen nagy segítség lehet a feladatmegoldás közben egy jegyzetlap használata.) Másrészt a „különbségek sorozatából újabb sorozat készítése" stratégiának a tanítása hatékony eszköze lehet-e a gondolkodás fejlesztésének? Vannak olyan feladatok, amelyeknél egy művelet eredményével mint részeredménnyel kell újabb műveletet végeznünk, hogy a keresett végeredményt megtalálhassuk *(G13. feladat).* A feladat rendkívül nehéz, ugyanakkor az intelligenciatesztekben megszokott módon kevés fogalomra és számos képességelemre épít.

G13. feladat

A legtöbb számsorozat esetén létezik egy kézenfekvő szabály, amelyet a legkisebb kognitív erőfeszítéssel meghatározhatunk. Az induktív gondolkodás képességének egyik eleme éppen az, hogy a tanuló fölismerje az információelméleti szempontból „gazdaságos", emiatt kézenfekvőnek vagy legintelligensebbnek nevezhető megoldást. A *Csapó* (2002) által alkalmazott induktív gondolkodási teszt utasításai ezt a következőképpen fogalmazzák meg: azt a szót vagy számot kell leírni, „amelyik a legjobban illik" a kérdőjel helyére vagy a vonalra.

Az induktív gondolkodás képességének fejlesztése mellett a divergens gondolkodás alakításának követelményéből következik, hogy minden olyan szabályt el kell fogadnunk megoldásként, amelyet a tanuló képes racionálisan levezetni. Az iménti feladat esetében például a számok közötti különbség mindig eggyel nő, vagyis a következő tag 6-tal lesz nagyobb, mint 15. A leegyszerűsítő, a sorozat információtartalmát nem kihasználó szabályalkotást is el kell ismernünk, azonban a tanórán megmutatjuk ilyen esetekben, hogy „több" van a sorozatban. Egy lehetséges leegyszerűsítő szabály lehet például, ha azt egyszerű, monoton sorozatként azonosítjuk, ahol a soron következő tag nagyobb az előzőnél. Ha ezt a szabályt alkotjuk meg, akkor a folytatásban bármely két természetes szám megfelelő, amelyek a sorozat monotonitását biztosítják. Egy másik leegyszerűsítő szabály, ami gyakran előfordul kisiskolásoknál, hogy periodikusnak ítélnek meg egy számsorozatot, amelyet a feladat kitűzője nem annak szánt. Ebben az esetben a 15-öt az 1 és a 3 követné. A feladatok kitűzése során tehát vagy eleve adjuk meg a sorozat folytatásának szabályát, vagy legalább utaljunk a megállapítandó szabály típusára, vagy pedig a szabályalkotás elválaszthatatlan lesz a sorozat folytatásától.

2.1.3. Geometria

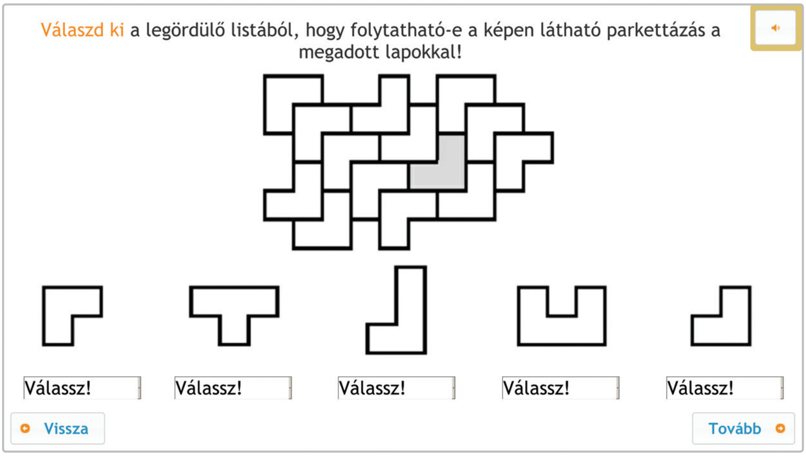
A matematikai gondolkodás rendszerében két képességet emelünk ki, amelyek szorosan kötődnek geometriai tartalmakhoz. Az intelligenciakutatás egyik élénken vizsgált képességterülete a térbeli gondolkodás, vagyis az embernek az a képessége, hogy mentálisan, gondolataiban képes elforgatni síkbeli és térbeli alakzatokat, és azokkal műveleteket, például geometriai transzformációként értelmezett forgatást végezni. A geometria egyik részterületéhez, a méréshez pedig a multiplikatív gondolkodás részeként értelmezett arányossági gondolkodás kapcsolható. Mind a terület- és térfogatszámítás, mind a mértékváltás területén adhatók olyan feladatok, amelyek lényegében az arányossági gondolkodás fejlettségét vagy annak hiányosságát jelzik. A térbeli gondolkodáshoz e korosztályban a következőkben leírt tartalmak kapcsolódnak.

A transzformációkkal létrejövő számtalan minta, valamint a természetben, a népművészetben, az épített környezetben, különböző emberi alkotásokban található minták megfigyelése előkészíti a szimmetriák, ismétlések, ritmusok, periodicitások matematikai értelmezését. A tanórai manipulatív és képi szintű tevékenységek elősegítik, hogy a tanulók képessé váljanak a szimmetriák felismerésére tapasztalati (manipulatív és képi) szinten. Legyenek képesek megkülönböztetni a tükörképet az eltolt vagy elforgatott képtől az eredeti képhez viszonyítva *(G14. feladat)*.

G14. feladat

A geometriai tudás jellegzetes képességrendszerét jelenti a térszemlélet. A térbeli képességnek *(spatial ability)* is nevezett képességrendszerünk teszi lehetővé, hogy a téri információt feldolgozzuk, a téri ingereket kódoljuk, felidézzük és átalakítsuk (*Séra, Kárpáti* és *Gulyás,* 2002). A térszemlélet bizonyos tesztjei az alsó tagozatos korosztály számára is megoldhatók, mint ahogyan *Chan* (2007) vizsgálatában történt. Az ott használt teszt, miként a hazai fejlesztésű Séra–Kárpáti–Gulyás-teszt (2002) is az idősebb, 14 éven felüli korosztályok számára lettek kifejlesztve. A térbeli képesség mérése régóta integrált része az intelligenciateszteknek, és akár Gardner többszörös intelligenciamodellje (*Gardner* és *Hatch,* 1989), akár a vizuális érvelés kibontakozó paradigmája felől indokolható, hogy iskolai keretek között is diagnosztizáljuk a térszemlélet fejlettségét. A *G15. feladat* a térbeli képesség tesztelésének egyik jellegzetes elemét mutatja be.

G15. feladat



Legördülő lista szövege: Folytatható / Nem folytatható

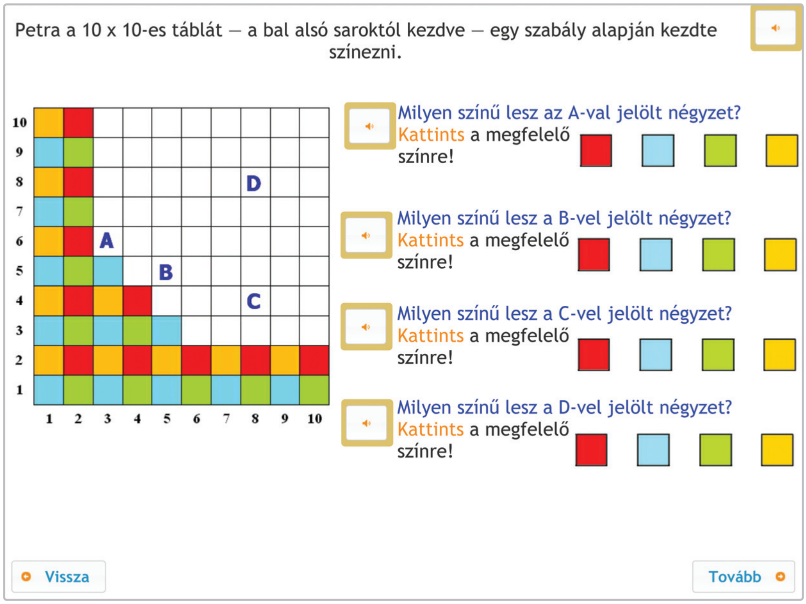
A feladatban a harmadik alakzat kivételével az összes többi alkalmas arra, hogy hozzáillesszük a megadott lapokhoz, ám a feladat a parkettázás folytatásáról szólt, és ezért az első és az ötödik elem a választandó. Egyébiránt a feladatot a matematikai tudás alkalmazási dimenziójához tartozóként is kezelhetjük, hiszen implicit módon tartalmazza azt az információt, hogy a parkettázás során jellemzően egybevágó síkidomokat használunk.

Az induktív gondolkodás geometriai tartamon keresztüli mérésére a *G16. és G17. feladat*okat mutatjuk be.

Figyelemre méltó jellemzője az eDia felület feladatírói lehetőségeinek a „fogd és vidd" módszer alkalmazása, amely kiegészül a megoldás automatikus értékelésével. Az online diagnosztikus tesztelés jelenleg is a geometria területén küzd a legnagyobb kihívásokkal, hiszen nemcsak a feladatkitűzés, hanem a válaszadás is gyakran vizuális eszközök használatát igényli, azonban az iménti feladatból jól látható a lehetőségek fejlődése.

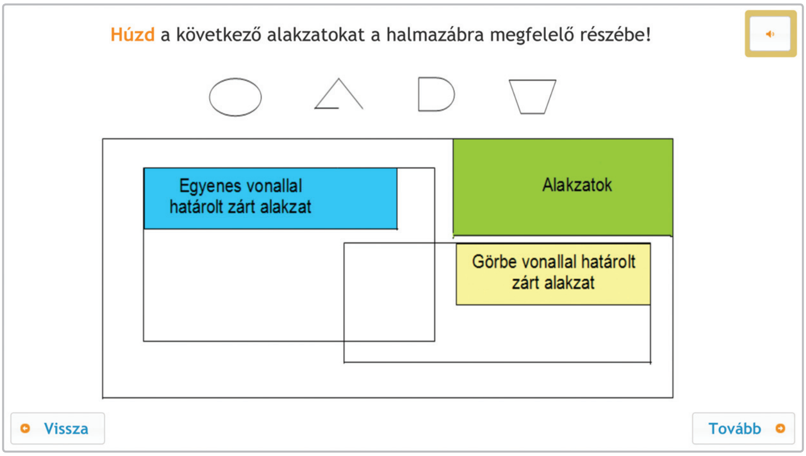
A geometriai tartalmak lényegében minden matematikai képesség fejlődésének mérésére és fejlesztésére is alkalmasak. A *G18. feladat* a rendszerezőképesség méréséről szól. A feladat, amennyiben a pontos fogalomhasználatot kívánjuk vele mérni, a matematikai tudás diszciplináris dimenziójához is tartozhat.

G16. feladat



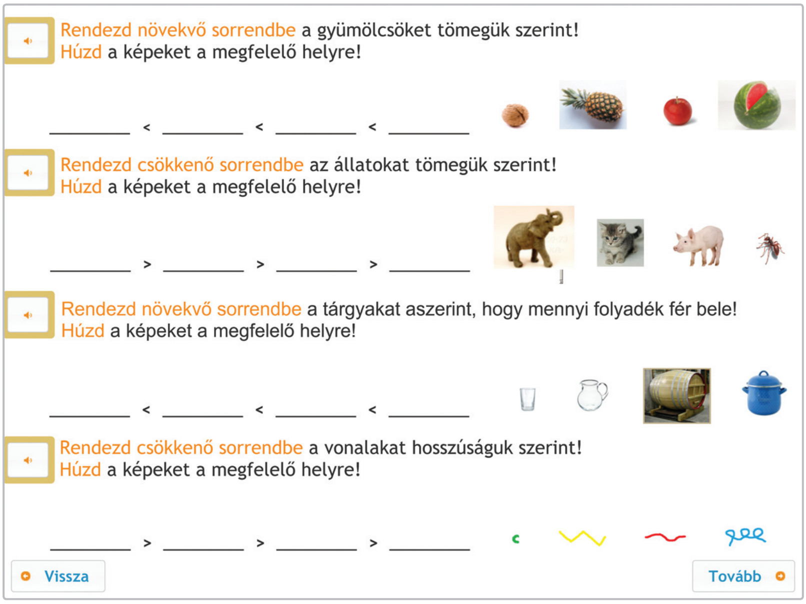
G17. feladat

G18. feladat



Vannak olyan feladatok, amelyekben a szabálykövetés mérésének lehetősége és az eDia felület „fogd és vidd” módszere egyaránt megtalálható. A *G19. feladat* remekül reprezentálja a két módszer ötvözésének lehetőségét.

G19. feladat



2.1.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

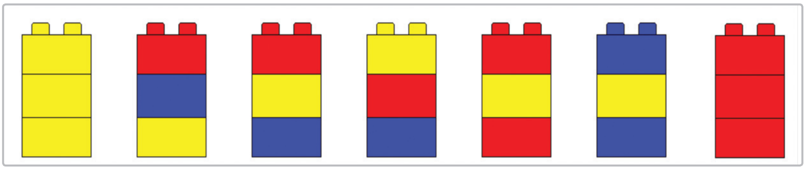
A kombinatív gondolkodás műveletei részben a kombinatorika matematikai tudásterületének elemeihez köthetők. A permutálás, a variálás és kombinálás matematikai jelenségeinek pszichikus megfelelőit feltárva számos olyan további képességelemhez jutunk, amely az iskolai matematikaoktatásban nem tipikusan a kombinatorika része. Ilyen például egy adott halmaz összes részhalmazának megkeresése vagy a Descartes-féle szorzathalmaz generálása. A matematikai gondolkodás elemei között azonban ez utóbbiak is kétségkívül a multiplikatív gondolkodás megnyilvánulásai, pszichológiai szempontból pedig a kombinatív gondolkodáshoz sorolhatók.

Általában a 2. évfolyam végére a tanulók fejlődésükben nem jutnak el az önálló kombinatív képességrendszer kiépítéséhez, hiszen ez feltételezne valamely struktúrában való gondolkodást, ami viszont magas matematikai absztrakciós képességet igényel. Ezért a mérés során sem célszerű felvetni ilyen jellegű problémákat, hanem érdemes kis elemszám esetén értékelni a részképességek fejlettségét.

A *G20.* és *G21.* feladat segítségével mutatjuk be a kombinatorikai tudás elemeinek egymásra épülését az alapozó szakaszban:

Piros, sárga és kék legóelemekből háromemeletes tornyokat építettem. Milyen tornyokat építhettem még? Rajzolj további, a bemutatottaktól a színek elrendezésében különböző tornyokat!

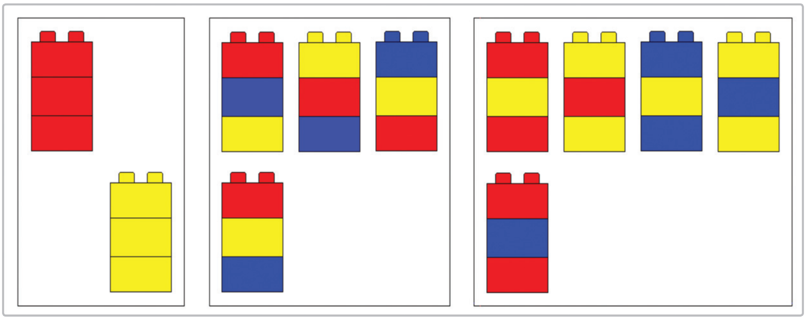
G20. feladat



Ebben a feladatban a problémát a szempont megtartása jelenti. A feladatmegoldónak minden új ötlete esetén ellenőriznie kell, hogy a kitalált torony megfelel-e a feltételeknek, azaz háromemeletes és piros, kék vagy sárga színek alkotják. Emellett azzal is törődnie kell, hogy az új torony nem szerepel-e már a korábbiak között. A tanulók tudásának felmérése szempontjából fontos, hogy ki mennyi új objektummal bővítette a készletet, kinek sikerült a meglevőktől és egymástól is különbözőt alkotni. Nehezítést jelenthet a feladat másfajta megfogalmazása, amikor a lehetséges esetek három csoportjából szerepel néhány megadott eset.

G21. feladat

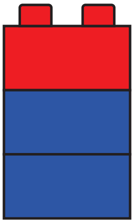
Piros, sárga és kék legóelemekből tornyokat építettem. Ezután három csoportba rendeztem azokat:



Milyet építhettem volna még? Rajzolj további tornyokat a megfelelő helyekre!

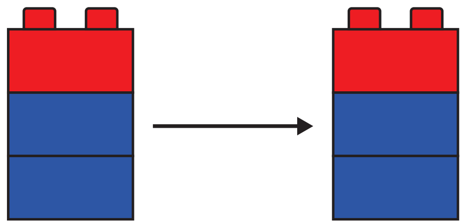
A *G21. feladat*ban a rajz, és nem a szöveg mutatja a rendszerezés szempontját. A szempont megfejtése a feladat lényeges eleme. Ebben az elrendezésben azonban a teljes rendszer átláthatósága kérdéses. Kérdéses továbbá az is, hogy található-e más szempont is a megoldáshoz.

A második csoport elrendezése azt mutatja, hogy az egymás alatt lévő elemek a tornyok „megfordításával" jöhetnek létre. Ez a stratégia itt nagyon jól működik. Nem vihető viszont tovább a harmadik csoportra, hiszen itt a példák sorából kimaradt néhány jellemző elem, ezért nem tűnhet fel az esetleges hiány. Elképzelhető, hogy valaki a harmadik csoportban lévő elemek elrendezésében érez valamiféle szabályosságot, nevezetesen, hogy az elemek egymás inverzei. Ebben a rendszerben viszont nem garantált az összes elem megtalálása, hiszen a rajz nem mutat példát a következő típusra:



A feladatban tehát más-más stratégiát kell alkalmazni az egy-, két-, illetve háromszínű elemek megtalálásához. Elképzelhető, hogy valakinek épp a megoldási stratégia jelenti a szempontrendszer alapját, és a fenti elemet a második csoportba rajzolja, hiszen

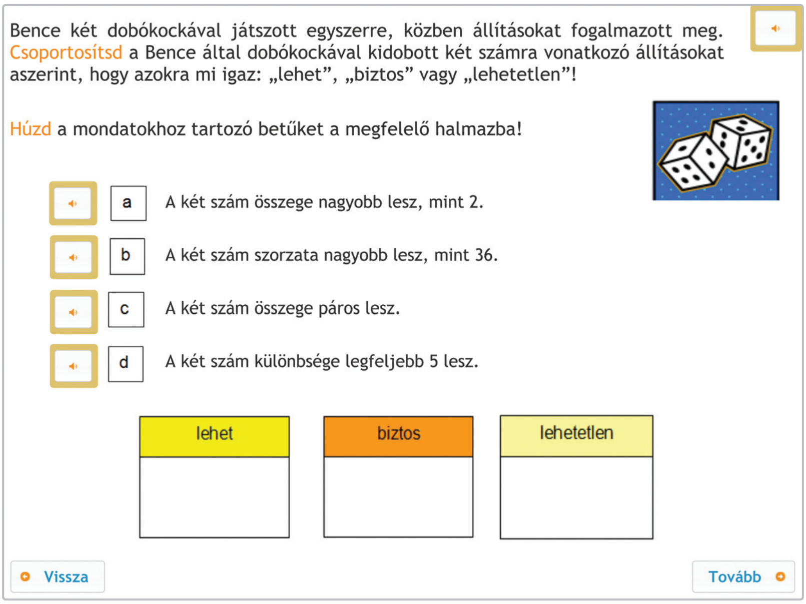
ebből a toronyból: ez a torony megfordítással jön létre.



A fenti feladat bemutatásával a kombinatorikai gondolkodás sokszínűségét szerettük volna illusztrálni, melynek egyenes következménye, hogy az értékelés során ebben a szakaszban meg kell elégednünk az adott feltételrendszerbe illeszkedő további néhány elem megtalálásával.

A kombinatorika témakör – noha alkalmas valamennyi matematikai képesség fejlesztésére – a mérés során leginkább a kombinatív képességhez kötődik. A *G22. feladat*ban a deduktív gondolkodás és a kombinatív gondolkodás nyilvánvalóan egyaránt szerepet kap.

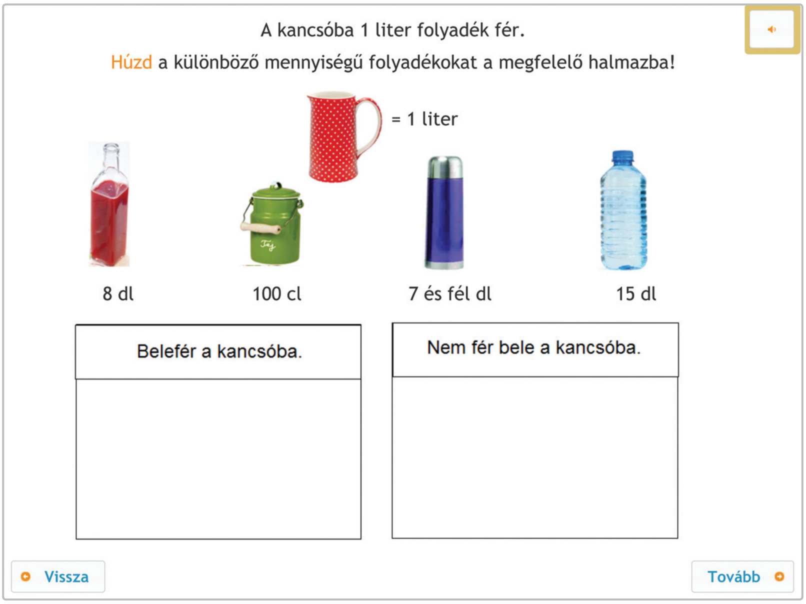
G22. feladat



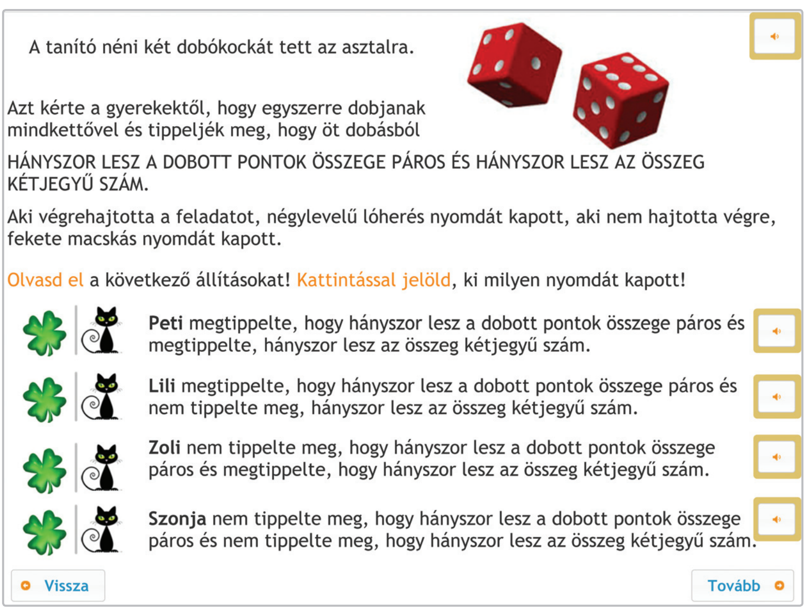
A *G23. feladat* a képi szintű feladatkitűzésre példa. A matematikai tananyagok és tesztfeladatok manipulatív, képi és szimbolikus típusai felelevenítik azt a több évszázados didaktikai vitát, amely a három típus sorrendjére, az elsajátítás nehézségére és logikájára vonatkozik. A probléma már a hetvenes években is a kutatási eredmények szintézisét ihlette (*Suydam* és *Higgins,* 1977), és a mai napig nincs átfogó és egyszerű válasz arra a kutatási kérdésre, amely így hangozhat: igaz-e, hogy a matematika tanulása során is először konkrét anyagokkal, manipulatív tevékenységekkel célszerű kezdeni a fogalmak kialakítást, majd ehhez képi és más érzékszervi reprezentációk társulnak, végül eljutunk a nyelvi és matematikai jelekkel leírt fogalmakig?

A *Suydam* és *Higgins* (1977) által áttekintett számos kutatás között voltak, amelyek megerősítették a manipulatív-képi-szimbolikus elsajátítási sorrendre vonatkozó hipotézist, de voltak, amelyek cáfolták. Álláspontunk szerint a tanulási és kognitív stílus is meghatározza, hogy milyen egyéni eltérések vannak a fogalmak kialakulásában, így azt tartjuk helyesnek, ha az online diagnosztikus mérés feladatai között szerepelnek mindhárom absztrakciós szintet érintő feladatok.

G23. feladat



G24. feladat



Befejezésül egy olyan feladatot mutatunk be, amely tartalma révén a kombinatorika területhez kapcsolódik, ám a benne értékelt gondolkodási képesség elsősorban a deduktív gondolkodás. Emellett – a fejlesztő értékelés lehetőségét szem előtt tartva – a *G24. feladat* a kombinatív gondolkodást is érinti, hiszen a két logikai kijelentés és kétféle igazságérték egymásra vetülése négy kombinatorikai lehetőséget ad.

2.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

2.2.1. Számok, műveletek, algebra

A számfogalom fejlődésében az egész és a racionális számok megfelelő reprezentációja kulcsfontosságú. Az additív gondolkodás megjelenési formái között szerepelnek olyan képességek, amelyek elvezetnek a racionális számok reprezentációjához. A racionális számoknak a gondolkodásunkban való egyik megjelenése a számláló és a nevező közötti viszony mentális leképezése. Már óvodáskortól előkészítjük a részekre osztás segítségével a törtszámok tapasztalati bázisát.

Az egész egyenlő részekre osztásával különféle mennyiségek (hosszúság, tömeg, űrtartalom, terület, szög, idő) segítségével alakul az egységtört fogalma, majd az egységtörtekből több rész egybefogásával készülnek a kis nevezőjű törtszámok. Kétirányú tevékenységet végeznek ennek során a gyermekek. Vágással, tépéssel, hajtogatással, színezéssel, a részek összeillesztésével egységtörtek többszöröseit állítják elő, illetve az egészhez viszonyítva megneveznek előállított törtrészeket. Különféle mennyiségekből előállított törteket összehasonlítanak, nagyság szerint rendezik azokat, keresik az egyenlőket. Az összeadás műveleti tulajdonságairól a gyermekek folyamatosan szereznek tapasztalatokat *(G25. feladat)*.

Kirakások, szám- és szöveges feladatok kínálnak lehetőséget a zárójel egy számmá összekapcsoló szerepének gyakorlására, az összeg tagonkénti szorozhatóságára *(G26. feladat)*.

G25. feladat

Micimackó és barátai távolugróversenyt rendeztek. A verseny során megmérték, ki hány ugrással képes eljutni a 120 méterre levő fához.

Fülesnek 24 ugrásra volt szüksége.

Malacka feleakkorát tud ugrani, mint Füles.

Róbert Gidának 30 ugrásra volt szüksége.

Kanga, a kenguru kétszer nagyobbat ugrik, mint Róbert Gida.

Írd a megfelelő számot a téglalapba!

a) Hány ugrással jut el Kanga a célba? ☐ ugrással

b) Hány ugrással ér Malacka a fához? ☐ ugrással

c) Milyen messze van az a fa, amelyet Füles 12 ugrással érne el? ☐ méterre

d) Melyik állítás HAMIS az alábbiak közül? Kattints rá!

- Füles kétszer akkorát ugrik, mint Malacka.
- Malacka tudja a legkisebbet ugrani.
- Róbert Gida kétszer akkorát ugrik, mint Kanga
- Róbert Gida 4 métereseket ugrik.

Vissza | Tovább

G26. feladat

A húsvéti nyúl a kerek erdő 7 lakóját lepte meg színes tojásokkal. Mindenki 3 darab csíkos és 5 darab virágmintás tojást kapott.

Kattintással jelöld meg az alábbi nyitott mondatok mellett, hogy melyik felel meg a feladat szövegének és melyik nem!

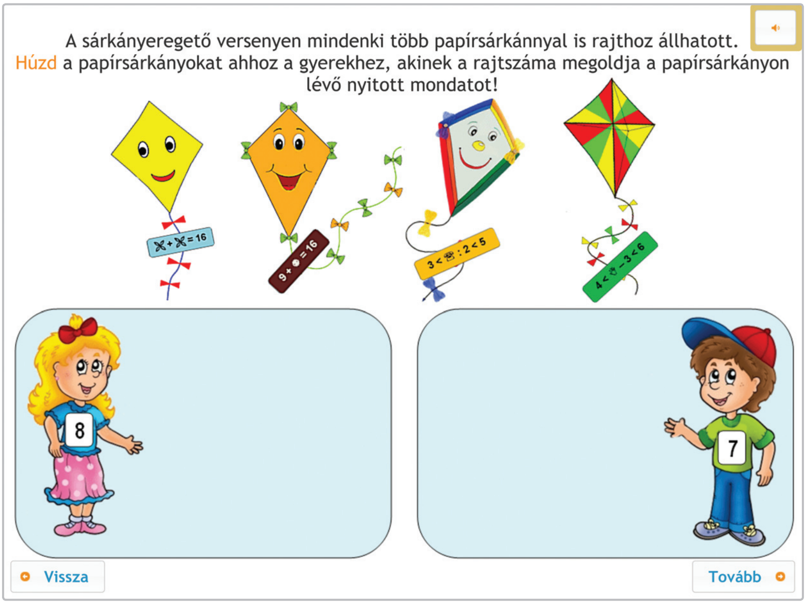
$7 \cdot (3 + 5) =$	Megfelel	Nem felel meg
$3 + 5 \cdot 7 =$	Megfelel	Nem felel meg
$7 \cdot 3 + 7 \cdot 5 =$	Megfelel	Nem felel meg
$7 \cdot 3 + 5 =$	Megfelel	Nem felel meg

Vissza | Tovább

Az írásbeli szorzás során a tanulók tudatosan alkalmazzák a műveleti tulajdonságokat.

A *G27. feladat* játékos formában ellenőrzi a szorzótábla ismeretét.

G27. feladat

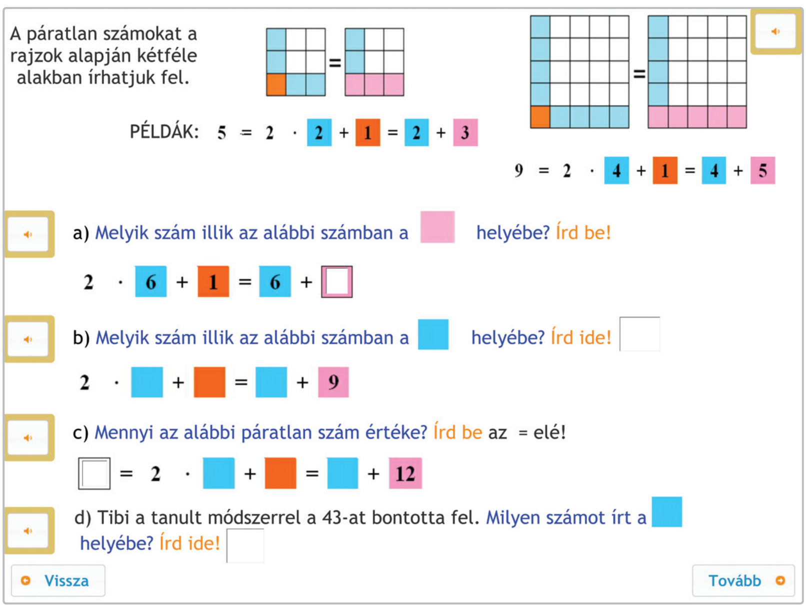


Az írásbeli műveletek közül a legnehezebb eljárás az írásbeli osztás. 4. osztályban eszközhasználattal ismerkednek meg a gyerekek az egyjegyű számmal való osztással.

A műveletvégzések során biztonságot ad a gyerekeknek a többféle ellenőrzési módszer, amelyekkel az eljárás tanulásakor megismerkednek. Az ellenőrzés módszerei között megtalálható a becslés, a visszaszorzás, az osztandó tagokra bontása, valamint a zsebszámológép használata.

Negyedik osztályban már általában lehetőséget teremtünk többféle megoldási mód keresésére és a megoldások összevetésére. Ily módon fejleszthető a modellek között létező kapcsolat felismerésének képessége. Tudatossá válik a gyerekekben a különböző modellekben megjelenő adatok azonossága, az ábrázolások és a műveletek összekapcsolása. A különféle megoldási módok megismertetése, ezek értő alkalmazása a biztosítéka annak, hogy új helyzetekben, megváltozott feltételek esetén is tudják a gyerekek ezeket az eljárásokat aktivizálni, szükség esetén a problémához illően módosítani. Így lesz a tanulók ismerete könnyen továbbfejleszthető. A többféle megoldási mód megismerése, összehasonlítása során a gyerekek megítélhetik azok célszerűségét, hatékonyságát is. A *G28. feladat*tal, majd a szövegtörzsben két példát mutatunk be egy feladat többféle módon való megoldására:

G28. feladat

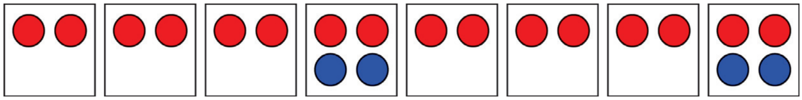


Második példa:

Egy magas hegy tetejére felvonóval lehet feljutni. Néhány felvonóban egyszerre ketten utaznak, néhány felvonóban pedig négyen. Egy 20 fős társaság 8 kabinban fért el. Hány két-, és hány négyszemélyes kabinban utaztak?

1. megoldás: *tevékenységgel, eszközhasználattal*

> *A gyerekek maguk elé helyeznek 8 papírlapot, amelyek a kabinokat szemléltetik, előkészítenek 20 korongot, amelyek az utazókat modellezik. Elhelyezik a korongokat a papírlapon úgy, hogy minden lapra két, illetve négy korong jusson.*



A kérdésre a választ a kialakult kép alapján fogalmazzák meg: 6 kétszemélyes és 2 négyszemélyes kabinban utazott a 20 fős társaság.

2. megoldás: *próbálgatással, táblázat alkalmazásával*

A kétszemélyes kabinok száma	1	2	3	4	5	6
A négyszemélyes kabinok száma	7	6	5	4	3	2
A kétszemélyes kabinokban utazók száma	2	4	6	8	10	12
A négyszemélyes kabinokban utazók száma	28	24	20	16	12	8
Összes utazó száma	30	28	26	24	22	**20**

Ebből a megoldásból több információ is leolvasható, olyan kérdésre is választ kapunk, amit az eredeti probléma nem fogalmaz meg. Pl. 30 fő hogyan utazhat fel a hegyre nyolc kabinban?

3. megoldás: *nyitott mondat segítségével*

Jelölje a felhasznált kétszemélyes kabinok számát: $\square$

Ezek szerint a felhasznált négyszemélyes kabinok száma: $8 - \square$

A kétszemélyes kabinokban utazók száma: $\square \; x \; 2$

A négyszemélyes kabinokban utazók száma: $(8 - \square) \; x \; 4$

Az összes utazó száma: $\square \; x \; 2 + (8 - \square) \; x \; 4 = 20$

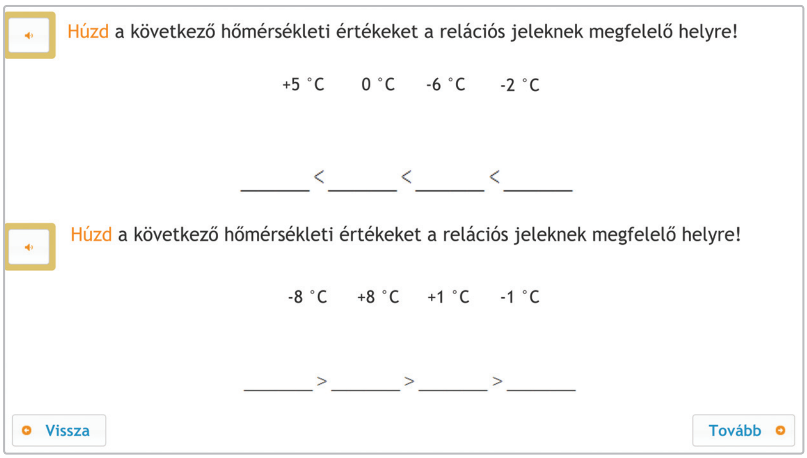
Ebből meghatározható, hogy a kétszemélyes kabinok száma 6. (A gyerekek ennek meghatározásához a tervszerű próbálgatás módszerét alkalmazzák.)

A felhasznált négyszemélyes kabinok száma 2.

Az iménti feladat három lényegesen különböző megoldási módja példa arra, hogy nem várhatjuk a gyerekektől egyetlen séma alapján a problémák megoldását, nem ragaszkodhatunk szigorúan betartandó lépések követéséhez. Ezért jó, ha értékelésünk a helyes modellválasztásra, és a modellen belüli problémamegoldásra irányul.

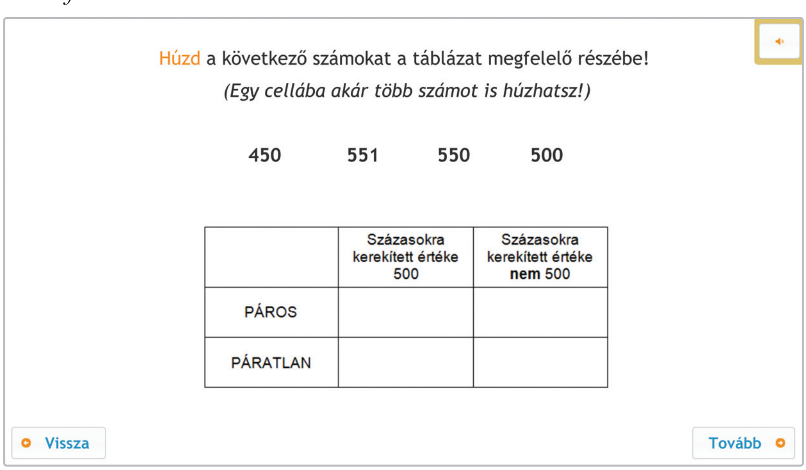
A rendszerezőképesség mérésének alábbi példája negatív és pozitív számok sorba rendezését kívánja. A negatív számokkal 3–4. évfolyamon kezdenek el ismerkedni a gyermekek, sorképzési feladattal *(G29. feladat)* ellenőrizhetjük a bevezetett fogalom megértését.

G29. feladat



A számok valamilyen szempont szerinti besorolása, halmazba foglalása is gondolkodási művelet, ez is a rendszerező képesség része. A besoroló készség sajátosságok felismerésével működik. A besorolás négy egyszerűbb készséggel funkcionál attól függően, hogy hány besorolandó elem és besoroló jellemző van jelen. A *G30. feladat*ban több besoroló tulajdonság és több besorolandó elem is jelen van, ezt szortírozásnak nevezzük. A tanulónak a célhalmazok közül kell megtalálnia azt, amelyikbe a besorolandó elem tartozik.

G30. feladat



A 3–4. osztályos aritmetika témakör következő példafeladatában az arányossági gondolkodás fejlettségét mérjük.

G31. feladat

Legördülő lista szövege: 35 család / 40 család / 45 család / 50család

A *G31. feladat*ban több készség megléte, egyidejű működése is szükséges a sikeres feladatmegoldáshoz. Mivel szöveges feladatról van szó, fontos, hogy a tanulók olvasási képessége olyan szinten legyen, hogy tudják értelmezni a mondatokat és a teljes szöveget. Kell, hogy megértsék a feladat matematikáját, azaz reprezentálniuk kell a megfogalmazott matematikai problémát. A szövegből át kell tudniuk ültetni a kérdést számokra, formulákra. Ezt követik a számolási műveletek a jó eredmény megadása érdekében. Továbbá át kell látniuk, hogy a feladatok kapcsolódnak egymáshoz. Végül a *G32. feladat*ban egy újabb feladatot mutatunk az arányossági gondolkodás témájához.

G32. feladat

Legördülő lista szövege: 4 gyerek / 5 gyerek / 6 gyerek / 8 gyerek

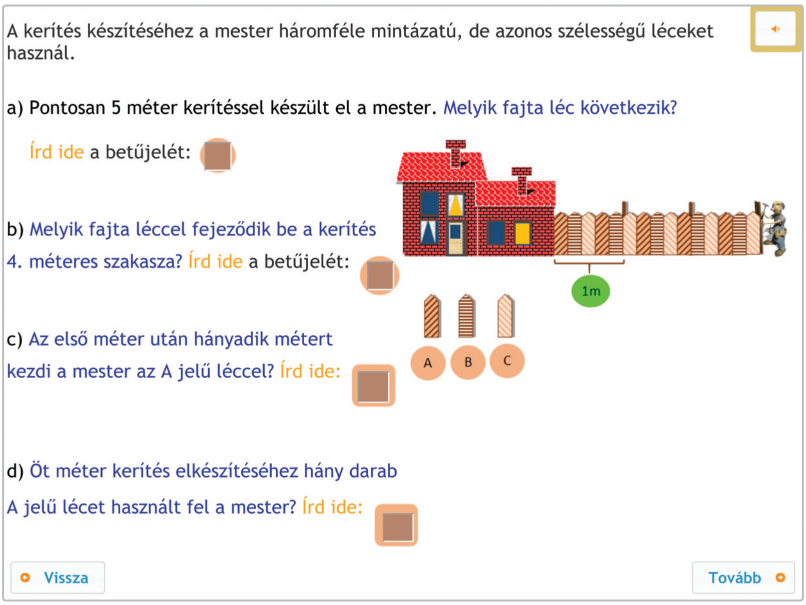
2.2.2. Relációk, függvények

Elvárás, hogy 3–4. osztályban a tanulók tudjanak egyszerű grafikont készíteni, arról adatokat visszaolvasni. Képesek legyenek szöveggel, képekkel adott helyzethez matematikai modellt keresni, azt az adatoknak megfeleltetni. Szükség esetén többféle matematikai modellt (sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok, grafikonok) használhatnak a szöveges feladatok megoldásához.

Az egyszerű összefüggéseket a tanulók felismerik, kifejezik példákkal, elemi általánosítással. Az összefüggéseket felismerhetik, a kapcsolatokat leolvashatják ábráról, táblázatból.

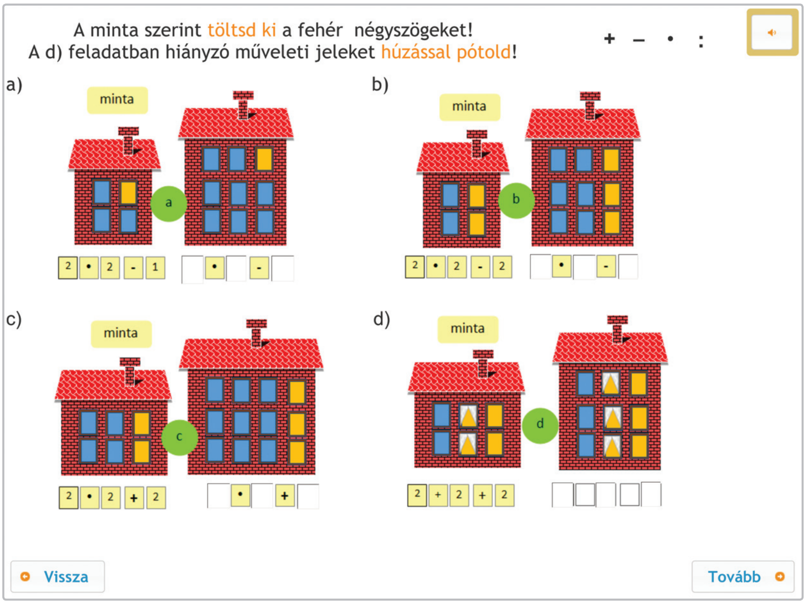
A megtanult ismeretek, a készségek, képességek értékelésére kezdetben az egyszerű utasítással megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben általában egy megtanult, begyakorolt lépés vagy lépéssor elvégzésére kérjük a tanulót. Előfordul, hogy még nem matematikai szimbólumokat használunk a feladat megadásakor, hanem rajzot, ábrát, és gyakran az elvégzendő lépéseket sem „matematikai” formában, hanem rajzban, valamilyen módon szemléltetve, sőt a mindennapi gyakorlatban valamilyen tevékenység formájában várjuk. A következőkben néhány példafeladattal szemléltetjük, milyen változatos tartalmú feladatok nyújtanak lehetőséget az induktív szabályfelismerés és -követés gyakorlására.

G33. feladat



A *G33. feladat*ban a képi illusztráció szorosan kapcsolódik a feladat szövegéhez, ezen belül a képek információtartalmának kezelése része a feladat megértésének. Így a *Berends* és *van Lieshout* (2009) által definiált kategóriák közül az „alapvető illusztráció” típusával van dolgunk. Hasonló a helyzet a *G34. feladat*ban. A *G35. feladat* játékos, a gyerekek által megszokott stílusú.

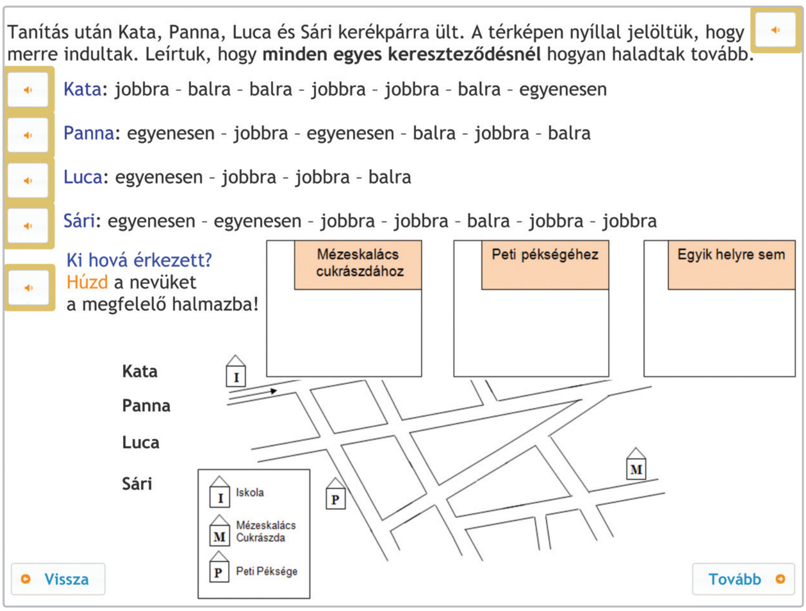
G34. feladat



G35. feladat

A *G36. feladat* a geometria tárgyköréhez is tartozhat. Itt azonban a szabálykövetésen van a hangsúly, emiatt a függvények témakörben szerepeltetjük. A feladat jól illusztrálja, hogy egyetlen képernyőképnyi felületen dús információtartalom helyezhető el már e korosztály számára is. A *G37. feladat* képi reprezentációkkal megadott induktív szabály felismerését várja el a tanulóktól.

G36. feladat

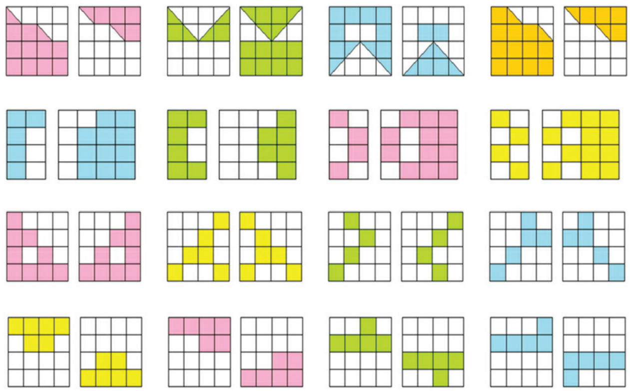


Az arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. A mértékváltás és az egyenletes mozgás matematikai fogalmára építve vagy különböző kontextusokhoz kötődően, mint például vásárlás, munkavégzés, számtalan lehetőség adódik feladatkitűzésre. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, nagyítás, stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására. A számok, műveletek és algebra fejezeteiben is szerepelnek hasonló matematikai szerkezetű vagy tartalmú feladatok; az itteni megjelenést az indokolja, hogy ezeknél a feladatoknál a matematikai mélystruktúra kifejezetten adatpárok vagy függvények kezelését igényli *(G38., G39. és G40. feladatok)*.

G37. feladat

Az alakzatpárok között minden sorban van egy kakukktojás.

Melyik az? Kattints rá!



Vissza Tovább

G38. feladat

Kati és Peti tulipánhagymákat ültetnek. Összesen 24 hagymát raknak egy virágágyásba. A hagymákat sorokba ültetik. Megbeszélték, hogy minden sorba ugyanannyi hagymát raknak. Többféle elrendezésre is gondoltak.

Melyik igaz állítás és melyik hamis? Írj I (igaz) vagy H (hamis) betűt a négyzetekbe!

- ☐ Amikor kétszer annyi sorba ültetnek, egy sorba kétszer annyi hagyma jut.
- ☐ Ha 2 sor helyett 6 sorba ültetnek, egy sorba harmadannyi hagyma jut.
- ☐ Ha a sorok számát felére csökkentik, egy sorba kétszer annyi hagyma kerül.
- ☐ Amikor 12 sor helyett 3 sorba ültetnek, egy sorba negyedannyi hagyma kerül.

Vissza Tovább

G39. feladat

Az iskolában tanszervásárt rendeztek, hogy a szülők és a gyerekek fel tudjanak készülni a következő tanévre. A vásáron nagyon sokféle árucikket találhattak az érdeklődők. A legegyszerűbb golyóstoll 45 Ft-ba került.

Hány forintot fizetett 6 db golyóstollért a vevő?

Válaszd ki a választ a felsoroltak közül! 240 | 270 | 300 | 330

Hány forintot fizetett volna, ha 4 darabot vásárol?

Írd be számjegyekkel a válaszodat az üres téglalapba!

Egy másik vevő 3 darabot vett ebből az olcsó termékből. Mennyit fizetett ő?

Válaszd ki a legördülő listából! Válassz!

Gabi édesanyja 250 Ft-ot adott a pénztárban a golyóstollakért. Hány darab tollat vett ő, ha a lehető legtöbb tollat vette meg ezért a pénzért?

Írd be számjegyekkel a válaszodat!

Hány forintot kapott vissza, ha a lehető legtöbb tollat vette meg ezért a pénzért?

Kattints arra a válaszra, amelyik szerinted a helyes! 20 | 25 | 30 | 35

Vissza Tovább

Legördülő lista szövege: 12 Ft / 125 Ft / 130 Ft / 135 Ft

G40. feladat

Nagymama Misi születésnapjára áfonyás kockát süt. A hozzávalók egy 24 cm és 22 cm oldalú téglalap alakú tepsihez a következők:

- 4 tojás
- 20 dkg cukor
- 25 dkg liszt
- 4 dkg tejszín

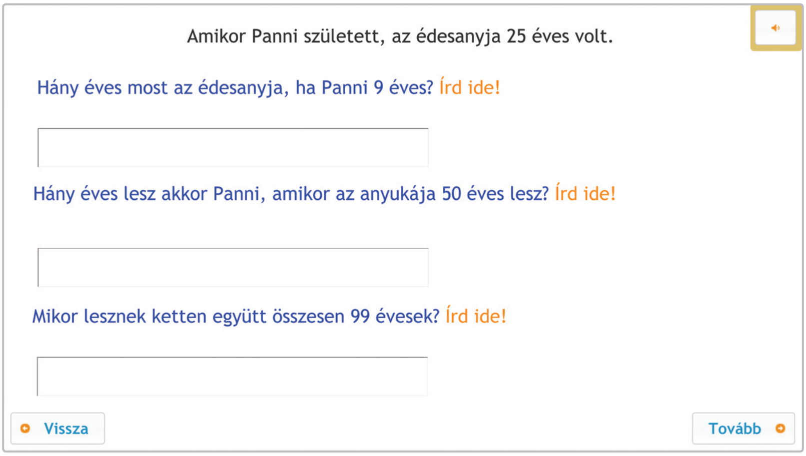
Mennyire van szükség a hozzávalókból, ha nagymama három tepsivel akar sütni?

Írd be a megfelelő számot a téglalapba!

- tojás
- dkg cukor
- dkg liszt
- dkg tejszín

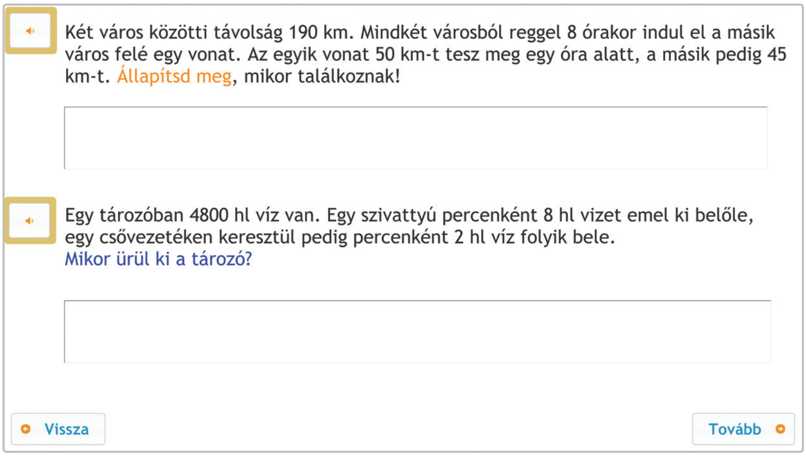
Vissza Tovább

G41. feladat

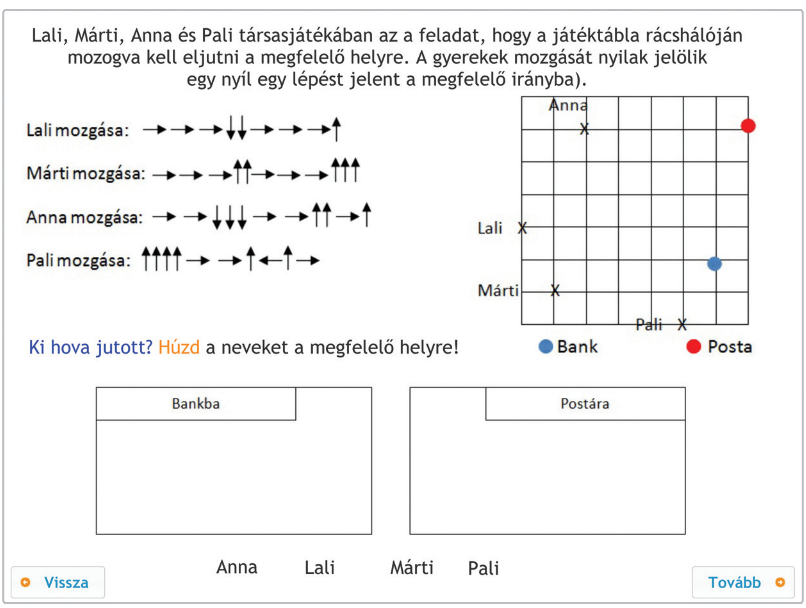


A szöveges feladatok között nagy jelentőségűek azok, amelyek hétköznapi jelenségeket, valamilyen mozgást, változást írnak le. Gyakran hőmérsékleti változást, növekedést, mozgást írunk le. Ezeket a változásokat kell a tanulóknak felismerniük, esetleg szemléltetniük, kapcsolatokat, összefüggéseket, szabályosságokat keresniük. A jelenségek leírásakor, szemléltetésekor lehetőség van a különféle helymeghatározás értékelésére. A következő feladatsorozat az összefüggések felismerésének és a szabálykövetésnek változatos tartalmú lehetőségeit illusztrálja. Az egyenletes változást leíró szöveges feladatok *(G41. és G42. feladatok)* az arányossági gondolkodás mérésére jól felhasználhatók.

G42. feladat



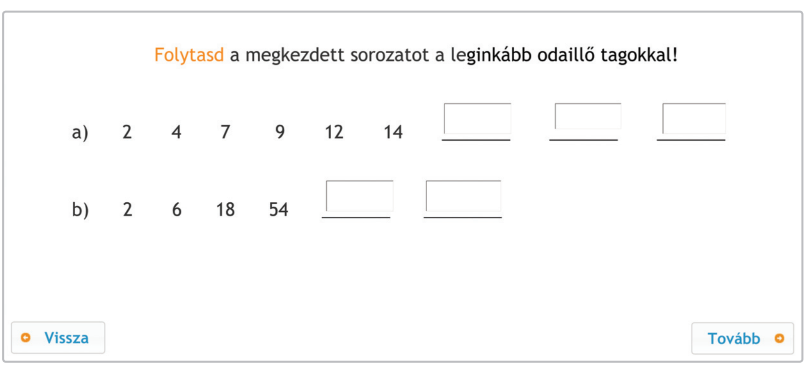
G43. feladat



A *G43. feladat* is absztrakt, ráadásul képi reprezentációval megadott szabály követését méri. A korosztály számára a nehézsége egyrészt a szokatlan megjelenésében rejlik, másrészt feltételezzük, hogy az ilyen feladat képi reprezentációk felhasználásával nehezebb, mint manipulatív tevékenységgel vagy akár verbális utasításokkal.

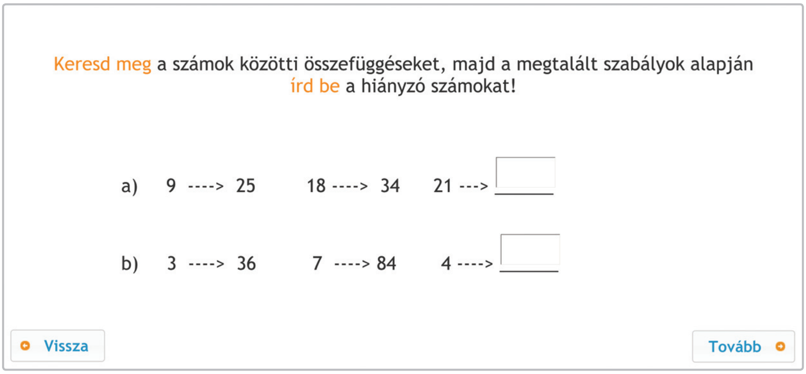
A matematika területén kiváló induktív gondolkodást mérő feladatok a számsorozatok. Ezekben a feladatokban jellemzően egy megkezdett számsort kell folytatni, amihez fel kell ismerni a számokat összekapcsoló szabályszerűséget *(G44. feladat)*. A számsorozatok az induktív gondolkodáson kívül a divergens gondolkodás fejlesztésére is lehetőséget nyújtanak, ezért fontos, hogy minden jó megoldásra rámutasson, és minden jó megoldást elfogadjon a pedagógus. Szükséges ismételten hangsúlyozni, hogy azokban az induktív gondolkodásra épülő feladatokban, amelyekben a szabály megalkotása is a feladat része, általában több jó lehetséges megoldás születhet. A tanórán a többféle megoldás egymás utáni megtárgyalása kiváló lehetőség a képességfejlesztésre, azonban az online diagnosztikus értékelés során szélsőségesen nehéz feladat lenne minden egyes ésszerű szabályalkotás és annak megfelelő számsorozat-folytatás programozása. Emiatt gyakran élünk azzal a szófordulattal, amely a *Csapó* (2002) által kifejlesztett induktív gondolkodási tesztekben jól működött: a *legjobban odaillő* folytatást keressük. A legjobban odaillő kifejezés látszólagos szubjektivitása a szakértők közötti egyetértés alapján feloldható, és objektív, programozható javítókulcs készíthető.

G44. feladat



Szintén induktív gondolkodást mérő feladat a *G45. feladat*ban a számok analógiája, ahol valamilyen összefüggés alapján számpárok kapcsolódnak össze. Az összefüggés felismerése után kell a tanulóknak egy következő számpárt alkotni, ahogyan a következő feladat mutatja.

G45. feladat



2.2.3. Geometria

Célkitűzés 3–4. osztályban, hogy a térbeli képességhez tartozó tudáselemek révén a tanulók képessé váljanak síkbeli sorminták, terülő minták, parkettaminták létrehozására kirakással, színezéssel, sablonnal és hálón való rajzolással.

A mérés területén megjelenik a mértékváltás követelménye. A mértékegységek átváltását a tanulóknak csak olyan esetekben kell tudniuk, amelyekhez – elvileg – reális tapasztalat kapcsolódhat. Így ugyanis a mechanikus számolás technikáját (és ezzel együtt biztonságát) a valós tapasztalatokban gyökerező arányossági gondolkodás veheti át.

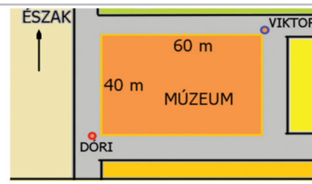
A geometriai terület valamennyi matematikai gondolkodási képesség fejlesztésére jól használható. A *G46. feladat*ban bemutatott példánk deduktív gondolkodást mérő feladat, amely geometriai tartalomra épül.

A feladatban az állítások logikai tartalmát kellett azonosítania a tanulónak, és ennek megfelelően kell kiválasztania a helyes megoldást. A gyermekek akkor képesek biztonsággal megoldani ezeket a feladatokat, ha értik az ÉS, VAGY, HA… AKKOR stb. kötőszavakkal kifejezett kijelentéslogikai műveleteket az összetett mondatokban. Mindkét bemutatott feladatban a deduktív gondolkodás képességét értékeljük. Az ilyen és ezekhez hasonló feladatok gyakoroltatásával képessé válik a gyermek arra, hogy a megtanulandó anyagról strukturált, szervezett, új helyzetekben is előhívható tudása legyen.

G46. feladat

Dóri a múzeum sarkánál áll.

Viktorral szeretne találkozni, aki az épület átellenes sarkán várja.



Dórinak 40 métert kell haladnia Észak felé, és 60 métert kell megtennie Kelet felé haladva.

Melyik állítás igaz, és melyik hamis az alábbiak közül? Jelöld az állítások igazságértékét!

a) Dóri 40 métert halad Észak felé, és NEM 60 métert halad Kelet felé. Igaz Hamis

b) Dóri 40 métert halad Észak felé, és 60 métert halad Kelet felé. Igaz Hamis

c) Dóri NEM 40 métert halad Észak felé, és NEM 60 métert halad Kelet felé. Igaz Hamis

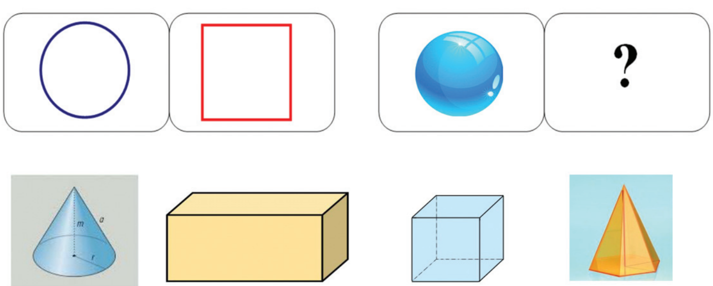
d) Dóri NEM 40 métert halad Észak felé, és 60 métert halad Kelet felé. Igaz Hamis

Vissza Tovább

G47. feladat

Írd ide ______ annak a mértani testnek a betűjelét, amelyik a kérdőjel helyére illik!

Úgy viszonyul a kör a négyzethez, mint a gömb a ....



A B C D

Vissza Tovább

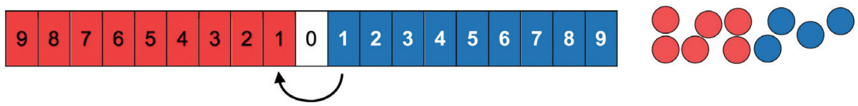
A *G47. feladat*ban induktív gondolkodást értékelünk a geometria tananyagrészhez tartozó mértani alakzatok viszonyfelismerésével. Az effajta feladatok jól alkalmazhatóak új ismeret feldolgozásában, hiszen a meglévő tudás transzferálását és aktív gondolkodást igényelnek.

Összefoglalóan, a geometria területén is megjelenhet az induktív gondolkodás mérése. Az 1.2.3. fejezetünk amiatt lehet tömör és rövid, hogy az 1–2. évfolyamon már bemutatott példafeladatok egyszerű fogalmi bővítéssel vagy akár változatlan formában alkalmasak a 3–4. osztályos korosztály matematikai gondolkodási képességeinek mérésére.

2.2.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

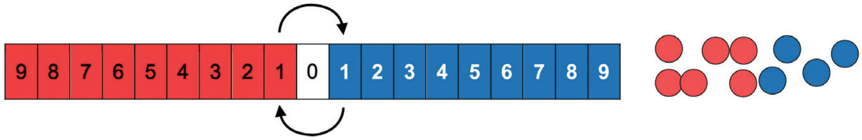
A kombinatorika és valószínűségszámítás témákban ezekben az évfolyamokban a rendszerezőképesség fejlesztése kerül a középpontba. Például a tanórán a gyerekek feladata lehet, hogy alkossanak háromszintes tornyokat, próbáljanak minél többfélét építeni. Keressék az összes lehetőséget. Az órán a tanító megkéri a gyerekeket, hogy gyűjtsék össze azokat az ötleteket, melyek alapján meg tudják állapítani: elkészült-e az összes lehetséges torony. Szükség lehet a tanító problémafelvetésére, segítségére: van-e még másmilyen, vagy ennyiféle van, és nincs több. Ennek egy fontos és jó lehetősége, hogy az elkészített tornyokat valamilyen alapelv szerint elrendezik maguk előtt. Néhányan esetleg arra figyelnek, hogy milyen színű a torony alsó eleme, s külön rakják azokat, amelyeket pirossal kezdtek építeni, külön a kék és külön a sárga aljú tornyokat. Ez esetben ráérezhetnek arra, hogy a három csoportban ugyanannyi toronynak kellene készülnie, s ez támpont lehet a hiány megállapításához, esetleg a hiányzó építmény megkereséséhez is.

A valószínűségi szemlélet fejlesztése során rengeteg játék kipróbálható. Például korongokkal. A játékot párban játsszák. A pár tagjai a játéktáblán oldalt választanak maguknak, és egy, a 0-ból (fehér mező) induló bábut mozgatnak. Jobbra léphetnek egyet, ha a 10 korong feldobása után több a piros, mint a kék, és egyet léphetnek balra, ha több a kék, mint a piros korong. (Ha ugyanannyi, akkor nem lépnek.)



Példánkban jobbra lehet lépni egyet. A játékot az nyeri, akinek az oldalán áll a bábu mondjuk 20 dobás után. (Ha éppen 0-nál áll, akkor döntetlen.) A játék egyszerű, a valószínűségi érzés azt diktálja, hogy ugyanolyan jó választás a kék oldal, mint a piros. Amikor osztályszinten összevetik tapasztalataikat, ugyanezt állapíthatják meg.

Egy másik alkalommal két bábuval és 10 koronggal játszanak úgy, hogy „A" akkor léphet, ha a piros korongok száma páros, „B" pedig akkor, ha a kékeké páros. Mindkét játékos a saját bábuját mozgatja.



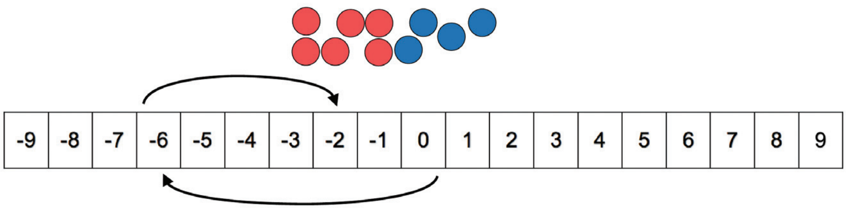
Példánkban mindkét játékos lép egyet. Néhány játékot le kell játszaniuk ahhoz, hogy megfigyeljék: a játék mindenképpen döntetlen lesz, hiszen vagy mindkét játékos léphet, vagy egyik sem. Érdemes azonban megtréfálni a gyerekeket ezzel a problémával, hiszen így válik sajátjukká az a gondolat, hogy a 10 csak olyan összegre bontható, melynek mindkét tagja páros, vagy mindkét tagja páratlan.

Ha a korongok számát most 9-re változtatjuk, ismét olyan játékot játszunk, ahol a valószínűségek megegyeznek.

További megfigyeléseket tehetnek, ha a problémát általánosítják. Például más páros vagy páratlan számú koronggal játszanak. A fejlesztés során a tanulók számára sokkal inkább motiváló feladat tapasztalatot szerezni a páros és páratlan számok összegre bontásáról egy ilyen játék kapcsán, mint mechanikusan végzett műveletekkel.

Más didaktikai céllal ismét páronként 10 koronggal játszanak. Egy bábu 0-ról indul, de most a játéktáblát a számegyenes váltja föl. A korongok feldobása után annyit lépjenek negatív irányba, amennyi piros korong esett az asztalra, és annyit a pozitív irányba, amennyi kék korong esett az asztalra!

Például ezt dobtam:



Negatív irányba lépek hatot, majd onnan, ahová érkeztem, pozitív irányba négyet. Léphettem volna előbb a kék irányba négyet, majd a piros irányba hatot. (A végén vajon ugyanoda érek? Vagyis a kommutativitás működik akkor is, ha negatív számok is szerepelnek?)

Most tízet dobnak egymás után úgy, hogy a bábu mindig onnan lép tovább, ahol az előző dobás után megállt. A gyerekeknek a játék megkezdése előtt tippelniük kell arra, hogy 10 dobás után hová érkezik a bábu ezek közül a leggyakrabban: −6, −3, −1, 1, 3, 8. Lehetséges, hogy a 8-ba? Vagy a −3-ba? A játék megkezdése előtt minden lehetséges. A valószínűségről alkotott képünk azt diktálja, hogy a sok dobás valahogyan kiegyenlíti egymást, és valahol a 0 közelében érdemes tippelni. Igen ám, de most a 0 nem szerepel a lehetséges tippek között, ezért az 1 vagy a −1 esetleg a 3 vagy −3 is jó lehet.

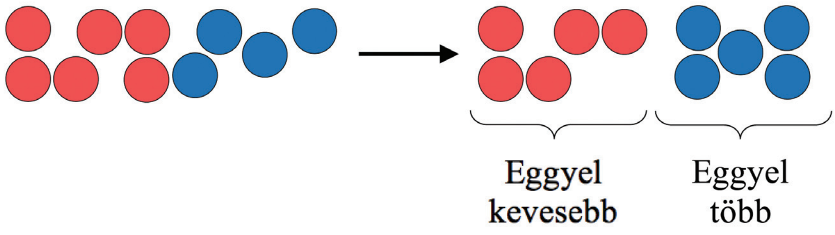
Ha lejátszottak néhány játékot, és a tanító végigkérdezi a gyerekeket, hogy melyik pár hova jutott, például a következő feljegyzéseket készíthetik: −2, −8, −2,− 4, 0, 0, 6, 6, 4, 8, 2, 2

Vajon *véletlen,* hogy mindenki páros számra jutott?

Egy újabb kör megerősítheti a sejtést, elkezdődhet a magyarázatok keresése. Összegyűjthetjük a lehetséges dobásokat, és az egy lépés hosszára vonatkozó lehetőségeket:

10 p = −10	10 k = 10
9 p +1 k = −8	9 k +1 p = 8
8 p + 2 k = −6	8 k + 2 p = ¬6
7 p + 3 k = −4	7 k + 3 p = 4
6 p + 4 k = −2	6 k + 4 p = 2
5 p + 5 k = 0	
…	

Vagy egyszerűen csak azt figyelik meg, hogy mi történik, ha egyetlen kék korongot pirosra változtatunk:



Megint egy olyan összefüggés, amelyet ha a gyerekek maguk fedezhetnek fel, sokkal inkább magukénak érzik, mint a tanár szájából elhangzott mondatot: „Ha a kisebbítendőt eggyel csökkentem, és a kivonandót eggyel növelem, a különbség kettővel csökken”.

Akárhogyan is dobunk tehát a 10 koronggal, az első dobás után mindenképpen páros helyre érünk. A további dobások során pedig minden esetben páros sokat lépünk. A lépegetés során a gyerekek tapasztalathoz juthatnak a pozitív számok ellentettjének értelmezéséhez szükséges tevékenységről, pozitív és negatív számok összeadásáról, valamint arról is, hogy az összeg paritására vonatkozó összefüggés a negatív számok körében is érvényes marad. A valószínűségről alkotott fogalmak tekintetében élményszerűbb tapasztalathoz juthatnak *lehetetlen eseményről*, mint egy olyan elcsépelt és túlságosan átlátható példával, hogy két kockával dobva a dobott számok összege 13 nem lehet.

Következő példánk kombinatorikai tartalmon a deduktív gondolkodás mérésére alkalmas. Amiatt fontos bemutatnunk ezt a példát *(G48. feladat),* mert talán a kombinatorika, statisztika, valószínűségszámítás tartalmi területen tűnik leginkább korlátozottnak a mért matematikai gondolkodási képességek köre – hiszen a kombinatív képesség és a kombinatorika témakör kapcsolata kézenfekvő.

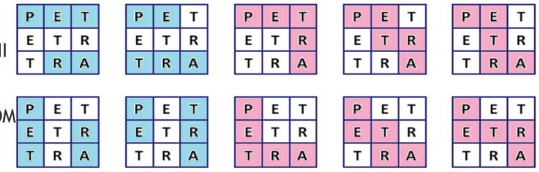
A következő feladatban *(G49. feladat)* képek segítik a diákokat a kombinatorikai feladat megoldásában. Ebben a feladatban a feltett kérdésnek megfelelően kell a kombinációkat megalkotni. A feladat elején meg van adva, hogy csak két összetételből állhatnak a konstrukciók. A gyermekek gyakran hajlamosak figyelmen kívül hagyni a lényeges információkat, ezért a pedagógusnak fontos felhívnia a figyelmüket, hogy alaposan, akár többször olvassák el a feladat utasítását.

G48. feladat

Petra a neve betűit 3 x 3 -as négyzet alakú papírlapokra rajzolta, majd leolvasta a nevét az ábrákról az összes lehetséges módon. Összesen 10 esetet talált.
Testvére kék és rózsaszín színesekkel színezte ki a neveket.

Petra megállapította:

CSAK AKKOR TUDOM KIVÁGNI EGY DARABBAN A NEVEMET, HA A RÓZSASZÍNNEL KISZÍNEZETT NEVEKET VÁGOM KI, DE AKKOR BIZTOSAN.



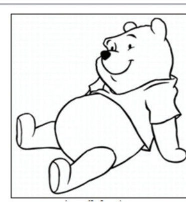
Kattints az IGAZ gombra, ha a nagybetűs (eredeti) kijelentés igaz és kattints a HAMIS gombra, ha a nagybetűs (eredeti) kijelentés hamis!

Petra a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket ki tudta vágni egy darabban.	Igaz	Hamis
Petra a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket NEM tudta kivágni egy darabban.	Igaz	Hamis
Petra NEM a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket ki tudta vágni egy darabban.	Igaz	Hamis
Petra NEM a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket NEM tudta kivágni egy darabban.	Igaz	Hamis

Vissza Tovább

G49. feladat

A 4. osztályosok rajzóráján 3 szín (K, S, P) felhasználásával képeket színeznek ki. Egyféle színnel a mackót, egyféle színnel a ruháját és egyféle színnel a hátteret.



Írd be számjegyekkel az üres négyszögbe a kérdésekre adott válaszaidat!

Hányféleképpen színezhetik ki...

...Micimackó figuráját bármely két szín felhasználásával?

...a képet, ha a háttér színe mindig kék színű lesz?

...a képet, ha Micimackó ruhája mindig piros színű lesz?

...a képet, ha a ruhája piros lesz és a háttér nincs kiszínezve?

Vissza Tovább

A következő feladatban *(G50. feladat)* már nem alkalmazunk képi segítséget. Tovább nehezíti a feladatot, hogy nemcsak a táblázatot kell kitölteniük a tanulóknak, hanem – a fenti feladathoz hasonlóan itt is – megadott kérdésekre is választ kell adniuk. Abban az esetben tudják jól megválaszolni a feladat második részét, ha a táblázatot jól töltötték ki a tanulók, illetve értik a megfogalmazások közötti különbségeket.

G50. feladat

Nyári táborozás során a gyerekek éjszakai akadályversenyen vesznek részt. Minden csapatot egy pedagógus segít.

csapatok összetétele (jele)	pedagógus segítők neve (jele)
csak lányok (L)	Anna néni (A)
csak fiúk (F)	Tóni bácsi (T)
vegyesen (V)	Marci bácsi (M)

A következő táblázat összefoglalja az összes lehetséges párosítási lehetőséget. Egészítsd ki a táblázat hiányzó részeit!

A csapat összetétele	L	F	V	V	L	V		F	F
A csapat segítője	A	T	M	A	M	T	T		A

A kísérő pedagógusokat is figyelembe véve hány lehetséges csapat...

c) tagjai között vannak lányok is?

d) tagjai között vannak mindkét nem képviselői?

e) Ha Anna néni biztosan a lányok csapatát segíti, akkor hányféleképpen alakulhat párosítás?

Vissza | Tovább

A szöveges feladatokban sokszor nem is a kombinatorikai dimenzió nehéz, hanem az, hogy rá kell jönnie a tanulónak, hogy nem csak egy megoldás lehetséges. Ez is mutatja a kombinatorikai feladatok fontosságának okát: hogy hangsúlyos bennük a teljességre, minden lehetőség átgondolására való törekvés. Ez jelenti ezekben a feladatokban az egyik legnagyobb kihívást a tanulók számára, ezért a pedagógusnak oda kell figyelnie, hogy rávezető, problémafeltevő kérdésekkel segítse a sikeres feladatmegoldást.

Végül egy olyan feladat, amely a matematikai tudás alkalmazási dimenziójában is helyet kaphatna, hiszen a valóságból vett plusz információ szükséges a megoldáshoz. A 631 oldalas könyv is vastagnak számít ebben a korosztályban, azonban a számjegyek ismétlődésének elvi lehetőségét ignorálja, hogy ezer oldalasnál vastagabb könyv nemigen fordul elő a korosztály olvasmányai között.

Sarolta megjelöl a kedvenc könyvében két oldalt. Az első ezek közül a 163. oldal. Melyik lehet a 2. oldal, ha az is ugyanezeket a számjegyeket tartalmazza?

2.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

2.3.1. Számok, műveletek, algebra

5–6. osztályban az egész számok (pozitív és negatív egészek egyaránt) tetszőlegesen nagy abszolút értékig megjelennek a tanórán, vagyis a számosságok korábbi évfolyamokban jellemző tapasztalati bázisát megtartva ki kell alakítani a „nagy" számok reprezentációit is. Matematikai szempontból tekintve ennek eszköze a számok normálalakja, pszichológiai szempontból nézve pedig az additív gondolkodás képességei. Az additív gondolkodás elemeként kialakul a számok nagyságára vonatkozó összehasonlításban a „kisebb, mint" és „nagyobb, mint" relációk egymással felcserélhetősége.

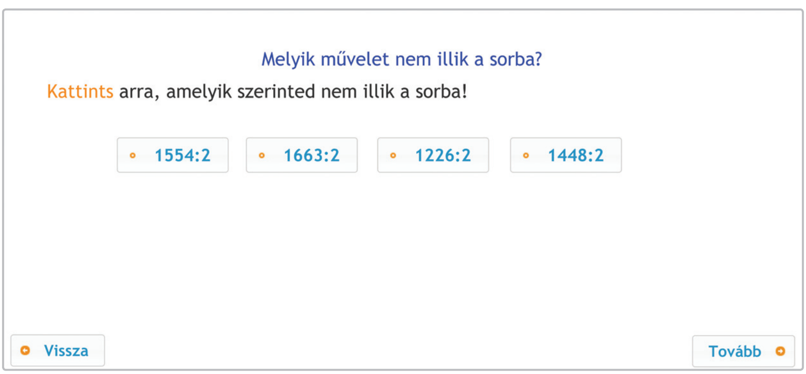
A tapasztalati bázishoz kapcsolható számok körében természetesen 5–6. osztályban is folytatódnak a változatos és céltudatos tevékenységformák: kirakások, vágások, bontások, helyiérték-táblázatok készítése, kitöltése, ezekből számok kiolvasása, szóban kimondott számok leírása, számegyenesen való ábrázolások, leolvasások, összehasonlítások stb. A sokoldalú tapasztalás segíti például a tört, tizedes tört, negatív szám fogalmának mélyítését, ugyanazon értékek sokféle megjelenítését (például bővítésekkel, egyszerűsítésekkel), és ugyanazon értékek különböző formában való megjelenítését (például tört tizedestört alakja és fordítva).

A *G51. feladat* a törtek egyszerűsítésének témakörét kapcsolja össze az induktív gondolkodás diagnosztikus értékelésével.

Csak a sokszínűen megtapasztalt fogalmak, tartalmak lesznek maradandóak, mozgathatóak, előhívhatóak. A *G52. feladat* az induktív gondolkodás segítségével oldható meg, és az egész és tört számok reprezentációjához kapcsolódik az írásbeli osztás műveletén keresztül.

G51. feladat

G52. feladat

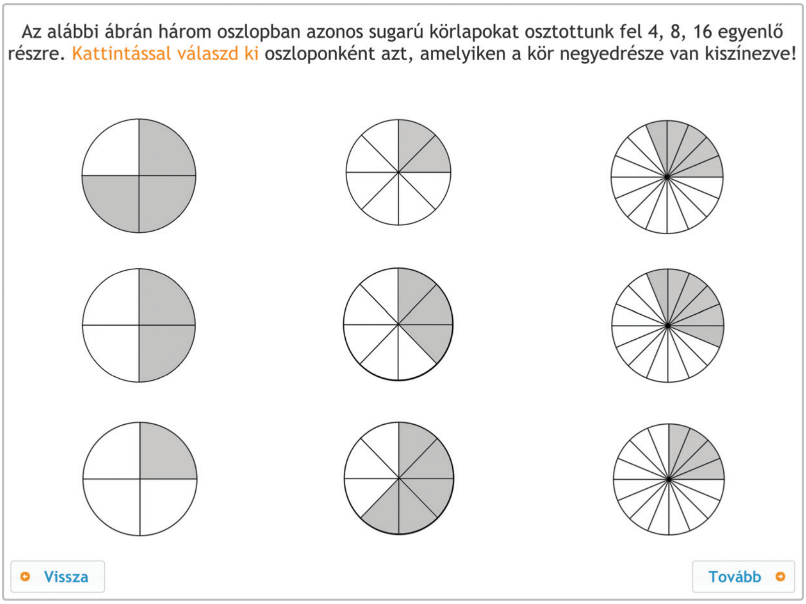


A törteknél is nagyon fontos láttatni (sok hajtogatással, kivágással, egyforma kockákból való kirakásokkal, változatos egységválasztással, rajzolással stb.) azt, hogy valamely egységet egyenlő részekre sokféleképpen oszthatunk, így egy adott törtértéket sokféleképpen jeleníthetünk meg.

Jól szemlélteti a *G53. feladat*ban lévő ábra, hogy az 1 / 4 = 2 / 8 = 4 / 16. Ha ezek a körlapok egyforma tortákat ábrázolnának, akkor az 1/4 résznyi tortát elfogyasztó gyerek ugyanannyi tortát enne, mint a 2/8 részt vagy a 4/16 részt elfogyasztó gyerek. Egyikük egy darab, másikuk kettő egyenlő, ám kisebb, a harmadik gyerek négy egyenlő, de még kisebb szeletet kapna ebből a tortából.

A törtfogalomra épülve az arányossági gondolkodást méri a *G54. feladat*.

G53. feladat

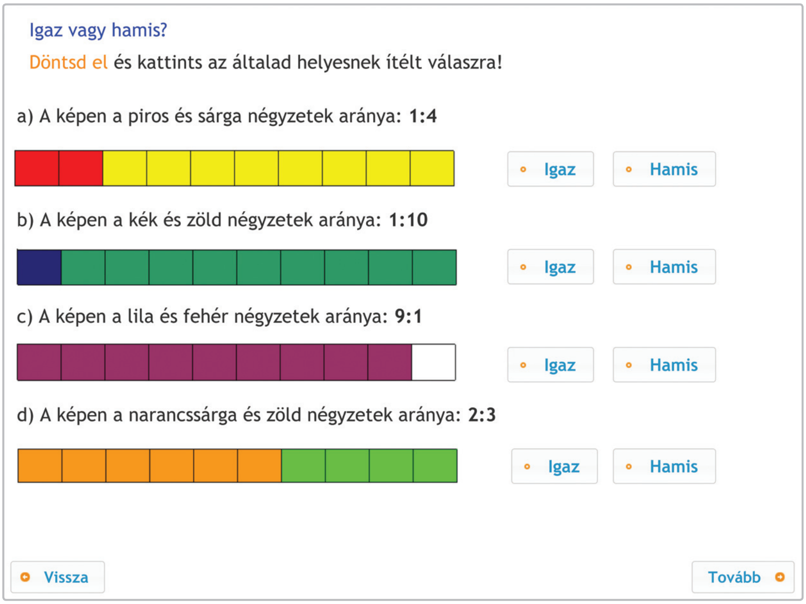


Sok ilyen feladat megalapozza a törtek bővítése és egyszerűsítése folyamatának megértését és az alkalmazás során történő átalakítások, ezen belül a közös nevező keresésének indokoltságát. A *G55. feladat* ennek a tudáselemnek mérésére mutat példát.

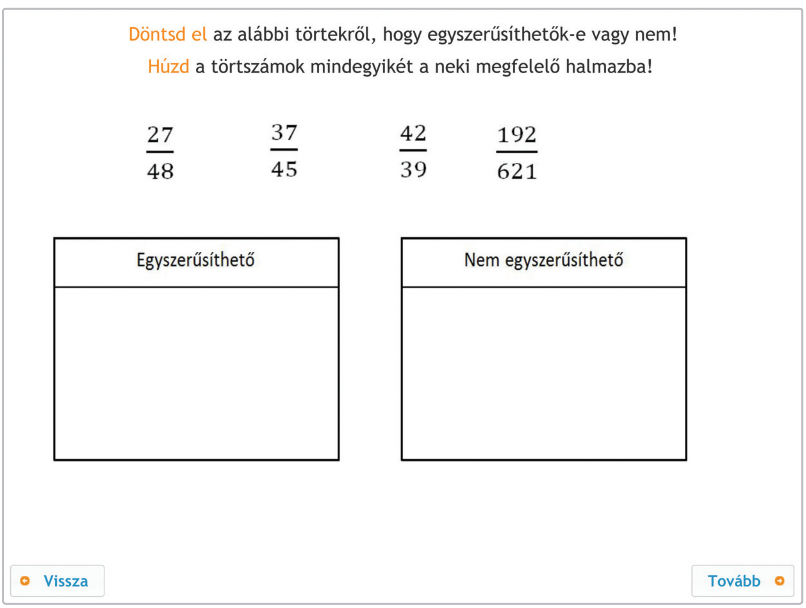
Az egészek és törtek számegyenesen való ábrázolása jól szemlélteti a számok egymáshoz való viszonyának megértését, a számok növekvő, csökkenő sorrendiségét.

A számegyeneshez kapcsolódó kérdések megválaszolása a számfogalom és műveletfogalom megértését is mélyíti. Ehhez a követelményhez tartozik a *G56. feladat.*

G54. feladat



G55. feladat

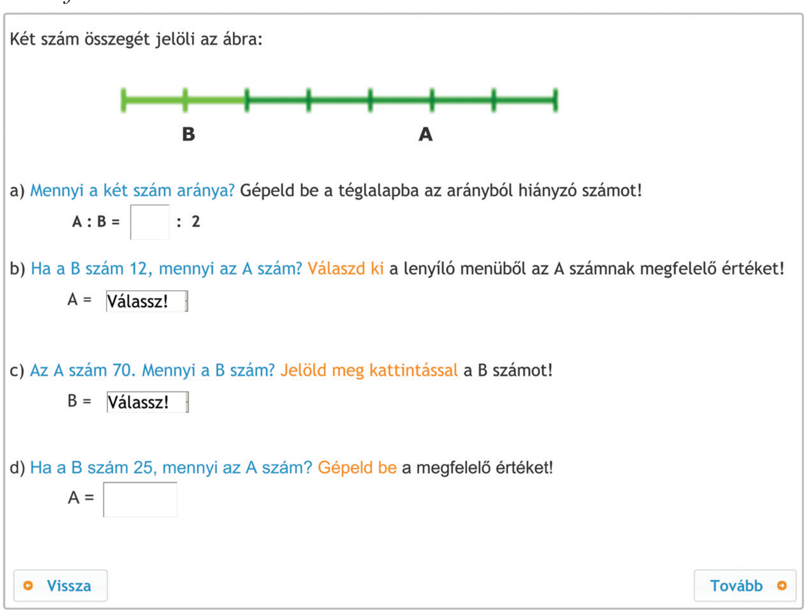


Cél, hogy a tanulók képesek legyenek a tanult számok számegyenesen való ábrázolására, illetve a számegyenes egy pontjához tartozó szám pontos vagy közelítő meghatározására, a számok nagyság szerinti összehasonlítására. A felső tagozat első két évfolyamán is törekszünk arra, hogy szóbeli és írásbeli műveletek helyes sorrendű, jó eredményt adó elvégzése mellett a számolásokat egyszerűsítő, gyorsító módszereket, eljárásokat is megismertessünk (pl. a műveleti tulajdonságok, a zárójelek felhasználásával). Ez is erősíti a fogalmak mélyítését, a műveleti algoritmusok tudatosítását.

A 6. évfolyam végére a tanulók megismerkednek a racionális számkörben végzett alapműveletekkel.

A számológépek tanórai használatát csak az alapműveleti számolási algoritmusok megértésének, a végeredményt illetően kellően pontos becslés nyújtása képességének birtokában engedélyezzük. A papír-ceruza tesztelés gyakorlatában általában nem engedjük a számológép használatát. Ennek több oka közül az egyenlőtlen technikai feltételeket (és esetleg a számológépnek látszó, de annál jóval többet tudó technikai eszközök használatának problémáját) emeljük ki.

G56. feladat



Legördülő lista szövege: b) 120 / 84 / 60 / 30 c) 14 / 20 / 28 / 50

A különböző „tudású” zsebszámológépek akkor szolgálják tanítványaink érdekét, ha nem vállalják át a gondolkodás fejlesztéséhez szükséges lépések, műveleti elemek elvégzését idő előtt. A problémák megoldásának modellje fejben születik, a kivitelezéshez nyújtott eszköz lehet a számológép. Például, amikor az egyenletek megoldását tanítjuk, akkor fejben és írásban dolgoznak a gyerekek, mert megértetni és megtanítani szeretnénk a megoldás algoritmusát. A nehezebb szöveges feladatok esetén a matematikai modell felállítása a kihívás, ha a modell már megvan, akkor esetleg használható a számológép, a számítógép egyenletmegoldó programja. Ha például a becsült vagy kiszámított eredmény helyességét szeretnénk gyors visszahelyettesítéssel ellenőrizni, akkor szintén indokolt lehet a számológép használata. A konkrét feltételek ismeretében dönthetünk csak helyesen arról, hogy mikor és miért hagyjuk használni a számológépeket, számítógépeket. A használat vagy annak tiltása indokoltságát mindig értelmes pedagógiai érvek támasszák alá.

A fejlett informatikai környezet alkalmazása szükségessé teszi a jó becslőképesség kialakítását. Ha technikai okok miatt nem működnek a gépek, akkor a jó becslőképesség biztonságérzetet ad (pl. a kifizetendő/visszajáró összeg kiszámításában).

A szöveges feladatok megértésének új elemei

Az 5–6. évfolyamon a folyamatosan bővülő ismeretek – így például a racionális számkörre kiterjesztett műveletek, a műveleti sorrend, az egyenes és fordított arányossággal és százalékszámítással kapcsolatos ismeretek – lehetővé teszik összetettebb szöveges feladatok megjelenését. Elvárásként fogalmazódik meg a megoldások igényesebb kivitelezése (lejegyzési, esztétikai szempontból), tudatosul, hogy a kerekítés szabályait felülírhatja a valóság (pl. ha a méterben kapható drótkerítésből 56,3 méter kell, akkor 57 métert veszünk, ha a konkrét számított terület alapján a burkoláshoz 37,2 darab csempe kell, akkor minimum 38 darabot és még néhányat veszünk), fejlődik a becslési készség és az ellenőrzés, önellenőrzés igénye.

A szöveges feladatok ezen a két évfolyamon is elsősorban a következtetéses gondolkodás fejlesztését (pl. egyszerű elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása következtetéssel, lebontogatással) az arányos következtetések fejlődését (pl. szabványmértékek átváltása, egyenes és fordított arányosság, egyszerűbb százalékszámítási feladatok), a problémamegoldó képesség (problémafelismerés, problémaazonosítás és -megoldás) fejlesztését, az értő-elemző olvasás fejlesztését szolgálják. A *G57. feladat* az arányossági gondolkodás mérésére alkalmas.

G57. feladat

Lacit nagymamája farsangkor farsangi fánkkal lepte meg.

Hozzávalók:	10 dkg cukor
50 dkg liszt	1 csomag vaníliás cukor
3 dkg élesztő	3 dl tej
4 tojássárgája	1 evőkanál rum aroma
10 dkg margarin	fél citrom reszelt héja

Ezekből a hozzávalókból nagymama 30 fánkot sütött ki. Segíts nagymamának kiszámolni a megfelelő adagokhoz a hozzávalókat! Válaszolj a kérdésekre! Írd be számmal a választ a szövegdobozba!

a) Hány darab fánkhoz szükséges 20 dkg cukor? ____ darab fánkhoz.

b) Nagyiékhoz vendégek érkeztek, ezért 90 darab fánkot sütött.
Hány dkg lisztre van szükség 90 darab fánk elkészítéséhez? ____ dkg lisztre.

c) A 90 darab fánk hatod részét Laci és két testvére ette meg.
Hány darab fánkot evett meg összesen Laci és két testvére? ____ darab fánkot.

d) A három vendég 12 fánkot evett, az általuk elfogyasztott fánkok aránya
Peti : Misi : Imi = 1 : 2 : 3.
Hány darab fánkot evett Misi? ____ darab fánkot.

Vissza Tovább

További feladatötletek, amelyek online diagnosztikus értékelés során változatos feladatokká alakíthatóak:

Keress összefüggést az alábbi mennyiségek között!
a) Karácsonyfa ára és magassága
b) Az autó menetideje és sebessége (Az úthossz legyen 20 kilométer!)
c) Egy születésnapi torta szeleteinek száma és a szeletek nagysága (egyenlő szeleteket vágunk)
d) A zöldborsó mennyisége és ára
e) A négyzet oldala és kerülete
f) A fagylalt ára és a gombócok száma

Megoldás: *A mennyiségek közötti helyes összefüggések felfedezése, megfogalmazása.*

A tanulóktól várható válaszok például:

a) Ugyanazon fajtájú fenyő esetén a magasabb fáért többet fizetünk, mint a nála alacsonyabbért.

b) Ha egy autó kétszer gyorsabban megy, akkor fele annyi idő alatt teszi meg a 20 km-t.

c) Minél több egyenlő szeletre vágom a tortát, annál kisebbek lesznek a szeletek.

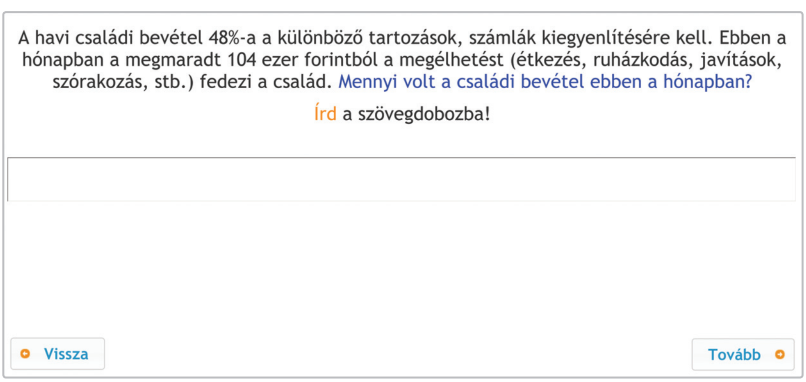
d) A borsóért fizetett ár egyenes arányban változik a borsó mennyiségével.

e) A négyzet oldala és kerülete egyenes arányban változik.

f) A gombócok száma és a fagyi ára egyenesen arányosan változik.

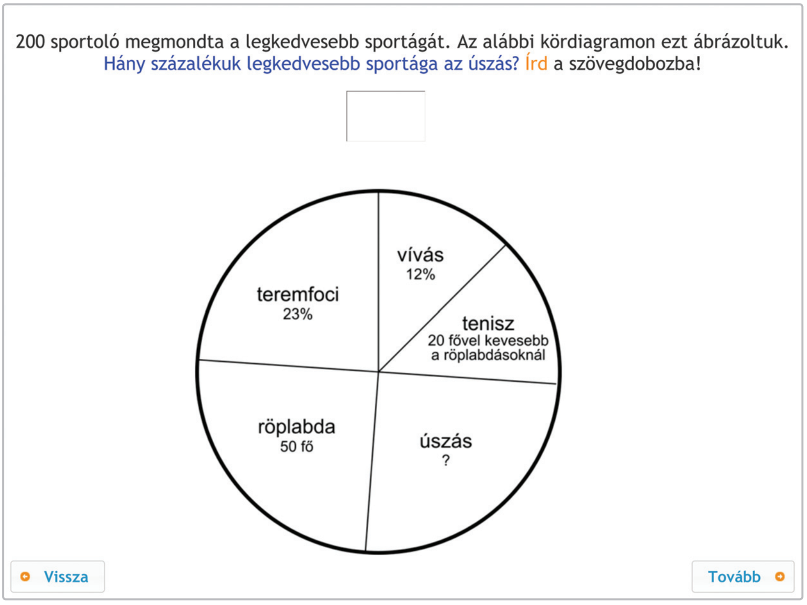
A tanulóknak tudni kell egyszerű elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket szabadon választott módszerrel megoldani, egyszerűbb szöveges feladatokat, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel megoldani, képesnek kell lenni a megoldások számegyenesen való ábrázolására. A megoldási módszerek közül – a következtetések mellett – ki kell emelni a rajzos, ábrás, szakaszos, számegyenest felhasználó módszereket. Sokszor ezek a rajzok, ábrák mutatják meg, hogy megértette-e a problémát, a feladatot a tanuló. A *G58. feladat* ezt a követelményt illusztrálja.

G58. feladat



A *G59. feladat*ban azt látjuk, hogy a feladatszövegek valamilyen konkrét rajzos, ábrás leképezése sok információt adhat a tanár számára a lassan kialakuló absztrakt gondolkodás pillanatnyi szintjéről.

G59. feladat



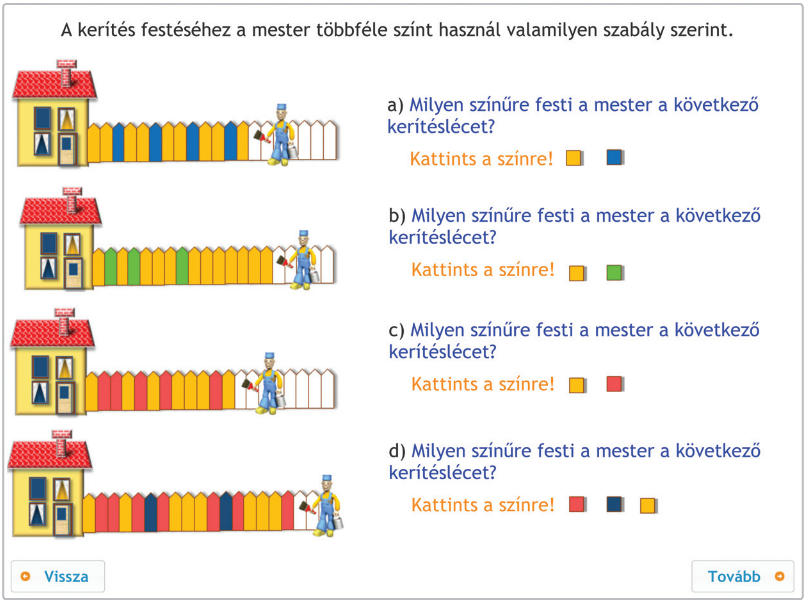
2.3.2. Relációk, függvények

A tanulók korábbi, arányossági következtetésen alapuló feladatmegoldására építve megismerik az egyenes arányosság fogalmát. Cél, hogy képessé váljanak felismerni az egyenes arányosságot gyakorlati jellegű feladatokban, valamint a természettudományos tárgyak tanulása során is. Tudjanak megoldani a mindennapi életben felmerülő, egyszerű, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel. A változó mennyiségek közötti kapcsolatok vizsgálata során a tanulók tapasztalatot szereznek a fordított arányosság felismeréséről, összetartozó értékpárjainak meghatározásáról is.

Az arányossági következtetések során a legegyszerűbb és korábban is gyakran előforduló lineáris összefüggések esetén képesek táblázatokban a hiányzó elemek pótlására, az adatok táblázatban való ábrázolására. Találkozniuk kell nem lineáris összefüggésekkel is, sőt célszerű ugyanannak a jelenségnek több nézőpontból való megvizsgálása is. Táblázattal megadott összefüggésekhez tudnak grafikont készíteni, valamint grafikon alapján meg tudják adni a táblázat elemeit. Az elsőfokú függvényt felismerik, pontjai alapján ábrázolni tudják. Képesek a gyakorlati életből vett egyszerű példákban a kapcsolatok felismerésére, lejegyzésére, ábrázolására.

Az induktív gondolkodás fejlődésének ebben az életkori szakaszában a tanulók képesek hiányzó elemeket meghatározni, illetve ismert elemek esetén szabályt megfogalmazni. Tudnak szabállyal megadott sorozatot folytatni, néhány eleméből szabályt megadni. Képesek a felismert szabály formulával való megadására. A *G60. feladat* a szabályalkotást a vizualitás szintjén várja el, és a szabály követése során is képi választ várunk.

G60. feladat

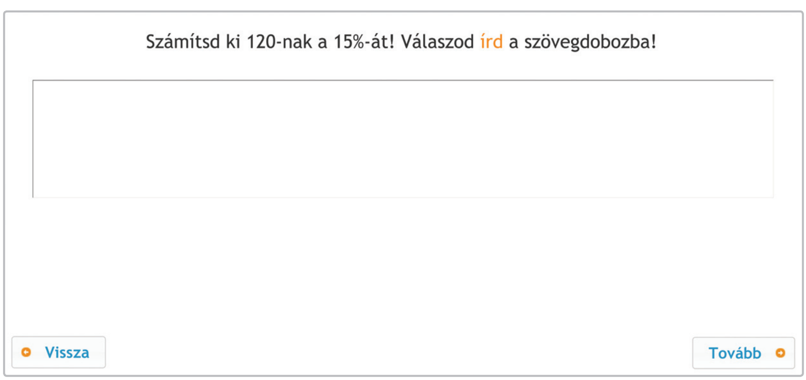


Ezen az iskolaszakaszon tovább fejlődik a tanulók helymeghatározó képessége. Tudnak számegyenesen adott tulajdonságú pontokat megkeresni, számintervallumokat ábrázolni, a kisebb, nagyobb, legalább, legfeljebb kifejezéseknek megfelelő adatokat szemléltetni, illetve ábráról leolvasni. Ismerik a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, az azzal kapcsolatos fogalmakat (tengelyek, origó, jelzőszám, koordináták, síknegyed). Tudnak a koordinátarendszerben konkrét pontokat ábrázolni, pontok koordinátáit leolvasni.

Az egyenes arányosság alkalmazásával, arányos következtetéssel egyszerű százalékszámításos feladatokat oldanak meg (pl. bevásárlás, takarékosság, napirend). Ennek gyakorlása során, a számításhoz szükséges algoritmusok felfedezésével és használatával párhuzamosan megismerik a százalékszámítás alapfogalmait: alap, százalékláb, százalékérték.

A megtanult ismeretek, készségek, képességek bemutatására kezdetben a matematikai szimbólumokkal megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben minden „zavaró tényező" nélkül közvetítjük a feladat matematikai struktúráját, legtöbbször utalunk azokra a műveletekre, algoritmusokra, amelyeket a megoldás során használni kell, sőt gyakran a feladat szövegében is szerepelnek matematikai szimbólumok. A *G61. feladat* megjelenésében teljesen megegyezik a megszokott papír-ceruza tesztfeladatokkal. Az online diagnosztikus tesztelés fejlődésével a javítás automatizálásnak újabb lehetőségeire számítunk, így az üres téglalapba a válaszként írt számadattól a szöveges válaszig sokféle jövőbeni lehetőség nyitva áll a javítás automatizálása előtt.

G61. feladat



A *G62. feladat* többféle módszerrel, stratégiával megoldható. Az induktív és a rendszerzési képesség tudáselemeit látjuk benne megjelenni konkrét matematikai tartalmakon.

A *G63. feladat* az egyenes és fordított arányosság fogalmának grafikus reprezentációhoz kapcsolásáról szól. Emellett alkalmas annak a nagyon fontos tudáselemnek mérésére, sőt, fejlesztésére is, miszerint egy grafikon ábrája megjeleníthet olyan összefüggést, amely sem nem egyenes, sem nem fordított arányosság.

G62. feladat

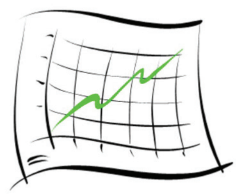
Anita a koordináta-rendszerben ábrázolt egyenesek néhány pontjának jelzőszámát olvasta le. Az egyik pont leolvasását elrontotta. Melyik az? Kattints rá!

(-5; 5) (-2; 2) (0; 0) (2; 2) (5; -5)

(-2; -4) (-1; -2) (0; 2) (1; 2) (2; 4)

(-2; -3) (-1; 0) (0; 1) (1; 2) (2; 3)

(-2; -2) (0; 4) (2; 6) (3; 8) (4; 10)

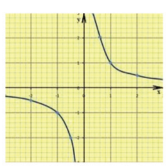


Vissza | Tovább

G63. feladat

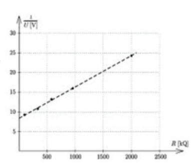
Milyen összefüggés áll fenn az ábrán látható két mennyiség között?
Válaszd ki a legördülő menüből a választ!

a) 1. ábra



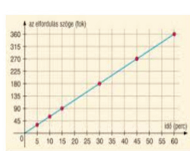
Válassz!

b) 2. ábra



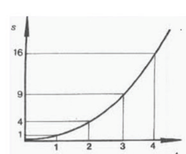
Válassz!

c) 3. ábra



Válassz!

d) 4. ábra

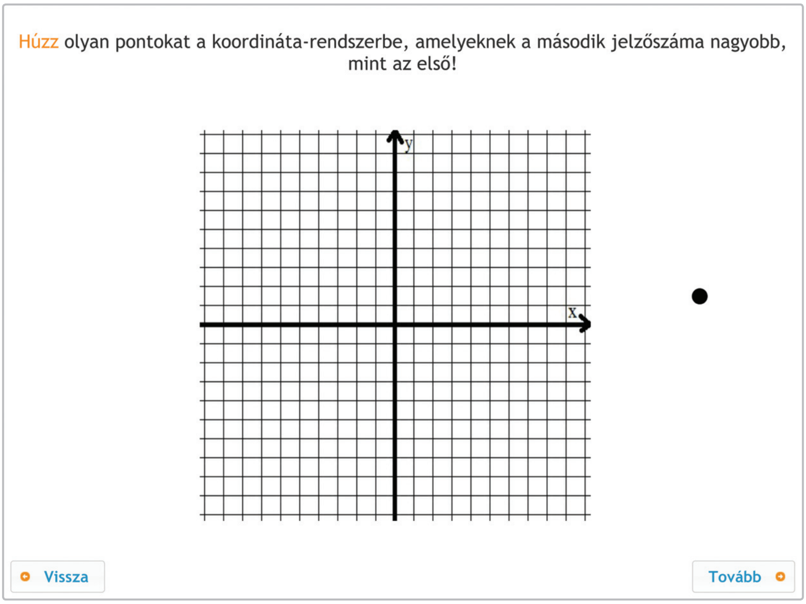


Válassz!

Vissza | Tovább

Legördülő lista szövege: egyenes arányosság / fordított arányosság / egyik sem

G64. feladat



A *G64. feladat* rámutat arra, hogy az automatikus javítás programozhatósága lehetővé teszi olyan feladat megfogalmazását, amelynek praktikusan végtelen sok megoldása van, és csak az ábra mérete szab korlátot a megoldások számának.

Az utolsó feladat példa arra, hogy az alkalmazásnak ezen a legegyszerűbb szintjén is lehet olyan feladatok megoldása elé állítani a tanulókat, amelyekben többféle helyes válasz, megoldási lehetőség is felmerül. Az ilyen jellegű feladatokkal is előkészíthetjük az összetettebb, problémajellegű, autentikus feladatokkal való foglalkozást. Természetesen ez a szempont a tanítás során merülhet csak fel, az értékelésnél ilyen esetben utalni szükséges a több megoldás lehetőségére.

A relációk, függvények témakörhöz talán legszorosabban köthető az arányossági gondolkodás képessége, így befejezésül a *G65. példafeladat*ot nézzük.

G65. feladat

A feladat a törtszámítás diszciplináris tudásdimenziójához is sorolható, ám a táblázatos elrendezés, a darabszámok szerinti sorba rendezés a feladatot egyben képességmérővé teszi.

2.3.3. Geometria

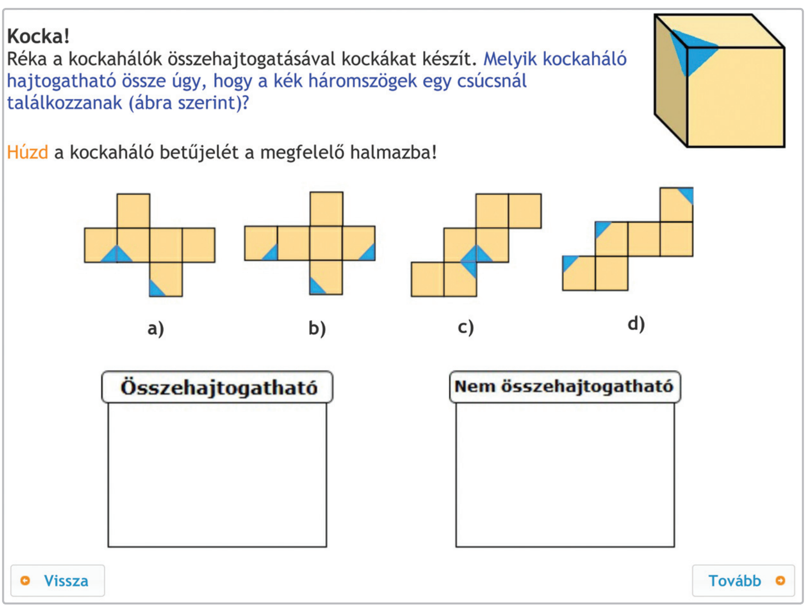
A korábbi évfolyamokon szerepelt két képesség (térbeli és arányossági) mellett, köszönhetően az 5–6. évfolyamra gyarapodó fogalmaknak, lehetővé válik geometriai tartalmakhoz is többféle olyan feladatot alkotni, amelyek az induktív, deduktív és rendszerezési képesség fejlettségének diagnosztizálására alkalmasak. Jelen esetben tehát egyik oldalról nézve a geometria tartalmak a képességfejlődés diagnosztizálásnak nyersanyagát jelentik, másrészt pedig a geometriai tudás fejlesztésének tagadhatatlan előnyeit és felhasználási területeit láthatjuk.

A *G66. feladat* jellegzetes példát mutat a térbeli képesség tesztelésére. A feladatkitűzés alapvetően képi reprezentációkra épül, azonban a sikeres megoldáshoz, vagyis a mentális képi tudáselemek megfelelő felhasználásához tanórai és tanórán kívüli manipulatív tevékenységeken keresztül vezet az út.

A *G67. feladat* a rendszerezési képesség működését méri geometriai tartalmon. Itt a rendszerzési képesség fogalmi szintű működése valósul meg, azaz manipulatív és képi tudáselemek nem támogatják a feladatot. Ettől függetlenül elképzelhető, hogy a tanulók a tesztkitöltés folyamán használható jegyzetlapokon igénybe veszik e két tudásreprezentációs formát is.

A *G68. feladat*ban többféle matematikai képesség felhasználása várható a megoldás során, így például deduktív és kombinatív képességelemeké is. Egy induktív gondolkodás képességét mérő geometriai példával zárjuk ezt a fejezetet *(G69. feladat)*. A megoldáshoz egyszerre van szükség a térgeometriai szemléletre és a szabálykeresés és szabályalkotás induktív képességelemeire.

G66. feladat



G67. feladat

Húzd be a geometriai fogalmakat a halmazábra megfelelő részébe!

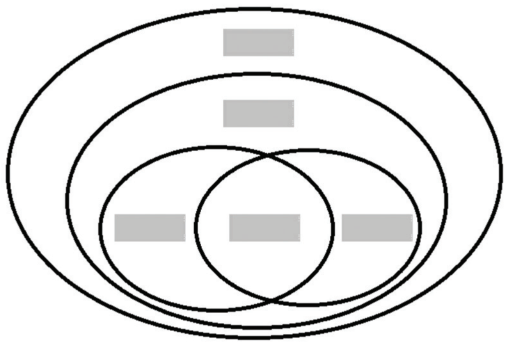
Négyzet

Négyszög

Deltoid

Sokszög

Téglalap



Vissza

Tovább

G68. feladat

12 literes vödröt használva akkor lett tele a víztárolásra használt edény, ha 15 vödör vizet öntöttünk bele.

a) Hány 6 literes vödörnyi víz kell a víztároló edény megtöltéséhez?

Kattintással jelöld meg a helyes választ!

2 vödör | 10 vödör | 30 vödör | 27 vödör

b) Hányszor kell a vödröt megtölteni a víztároló edény feltöltéséhez, ha 20 literes vödröt használunk?

Gépeld be a szövegdobozba a helyes számot! ____ alkalommal kell a vödröt megtölteni.

c) Válaszd ki a lenyíló menüből a helyes kiegészítéseket!

Ha 12 literes vödör helyett a 4 litereset használjuk, amelyikbe Válassz!

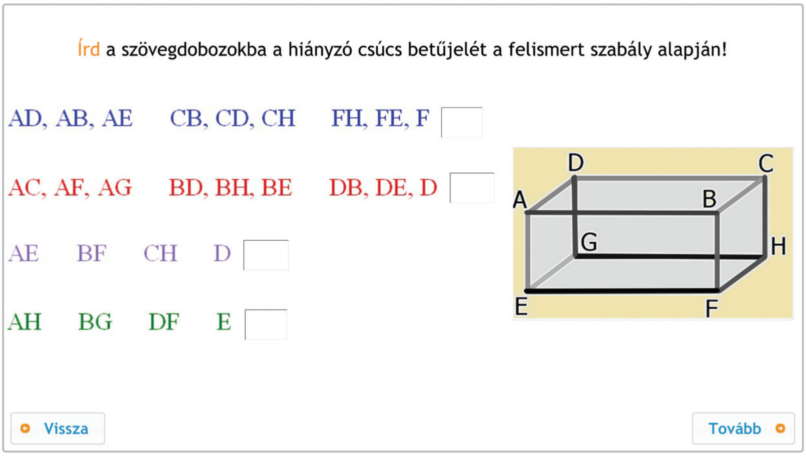
víz fér el, akkor Válassz! több alkalommal kell a vödröt megtöltenünk.

Vissza

Tovább

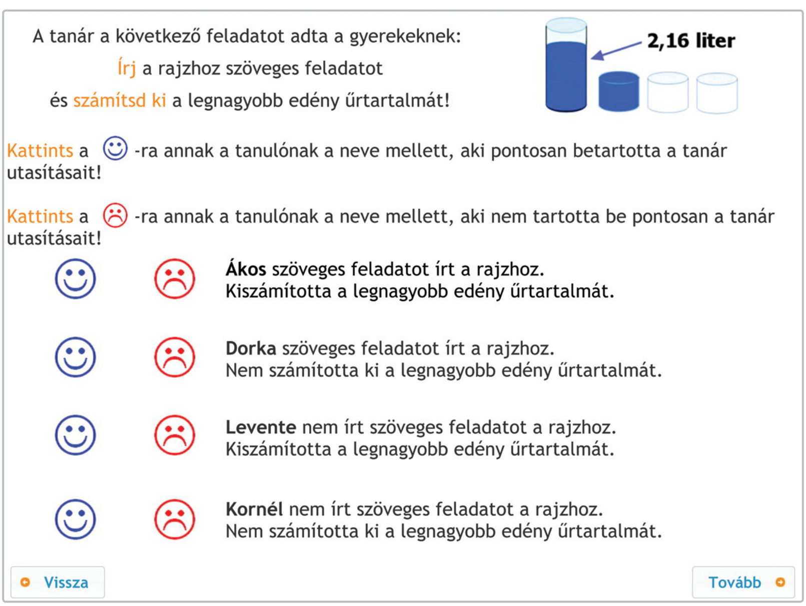
Legördülő lista szövege: feleannyi / harmadannyi / negyedannyi / hatodannyi
2-szer / 3-szer / 4-szer / 6-szor

G69. feladat



Végezetül egy geometriainak tűnő feladatot mutatunk be, melynek kontextusa és tartalma a korosztály számára ismerős. Azonban egyszerű, a deduktív gondolkodás egyik komponensét, a konjunkció műveletének kezelését értékeli a *G70. feladat.*

G70. feladat



2.3.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika esetében az alapkészségek fejlesztése és a szaktantárgyi tudás elmélyítése ebben a korosztályban is egyaránt releváns célkitűzés. A kombinatív és a korrelatív gondolkodási képességek tartalomhoz kötött fejlesztésének lehetősége mellett sor kerül az adatkezelés és -ábrázolás, valamint a halmazelméleti alapokon álló valószínűségi események matematikailag adekvát megalapozására. A korrelatív gondolkodás képessége a matematikai gondolkodás rendszerében a multiplikatív gondolkodás egyik formájaként értelmezhető. Adatsorok közötti összefüggés felismerése és a kapcsolat megfogalmazása a feladat, ahol az összefüggés nemcsak hogy nem lineáris, hanem általában nem is adható meg egyszerű képlettel.

Korábban említettük, hogy a kombinatorika témaköre a kombinatív képesség mérésének és fejlesztéséhez természetszerűleg szorosan kapcsolódó terület. 5–6. osztályban már a képi szinttől jórészt elszakadva lehetővé válik, hogy fogalmi szinten, a konkrét, egyedi esetek tételes felsorolása nélkül is válaszoljanak a tanulók az összes lehetőségre, az összes lehetséges sorrendre vonatkozó kérdésekre. *Szitányi* és *Csíkos* (2015) eredményeivel összhangban azonban nem célja sem a fejlesztésnek, sem az online diagnosztikus értékelésnek, hogy a képi reprezentációkat kizárjuk vagy visszaszorítsuk a kombinatorikai feladatokból, hiszen valamilyen vizualizációs stratégia alkalmazása pozitív irányú összefüggést mutat a kombinatorikai teljesítménnyel. A *G71. feladat*hoz többféle vizualizációs stratégia elképzelhető.

A *G71. feladat* esetében minden bizonnyal szükségük lesz a tanulóknak az opcionálisan használható papírlapokra, amelyeken részszámításokat végezhetnek, rajzokat készíthetnek. Várhatóan gráfszerű, poligonszerű vagy más típusú rajzok készülnek a tanulói jegyzetlapokra. Az online diagnosztikus tesztelés által nyújtott előnyök közül itt a legszembetűnőbb az automatikus, online, objektív értékelés.

G71. feladat

A 6. osztályosok iskolai matematikaverseny selejtezőjéből a 4 legjobb tanuló (Peti, Marci, Laci és Robi) jutott a döntőbe.

Írd be számjegyekkel az üres téglalapokba az alábbi kérdésekre adott válaszaidat!

a) Hányféle sorrend lehetséges köztük, ha nincs holtverseny?

b) Hányféle sorrend lehetséges, ha tudjuk, hogy Marci lett az első?

c) Hányféle sorrend lehetséges köztük, ha a 3. és 4. helyen holtverseny alakult ki?

d) Hány kézfogás történt, ha az eredményhirdetés után minden döntőbeli versenyző kezet fogott egymással?

Vissza Tovább

G72. feladat

Az olimpián 10 tanuló vett részt összesen 15 versenyszámban.

Döntsd el az alábbi események mindegyikéről, hogy biztos, lehetséges vagy lehetetlen!

a) Van olyan tanuló, aki legalább 2 versenyszámban vett részt.
b) Van olyan tanuló, aki legalább 3 versenyszámban vett részt.
c) Van olyan tanuló, aki 7 versenyszámban is részt vett.
d) Van olyan tanuló, aki 6 versenyszámban is részt vett.

Húzd az események betűjelét a megfelelő halmazba!

a b c d

Biztos	Lehetséges	Lehetetlen

Vissza Tovább

A *G72. feladat*ban is sokféle megoldási stratégia érvényesülhet, a halmazok rajzolgatásától a választható opciókból kiinduló, visszafelé ható gondolkodási módszerekig. Ez utóbbira példa: Gondolkodhat úgy egy tanuló, hogy először megnézi, melyek a biztos vagy a lehetetlen események, és a végén kizárásos alapon a többit a lehetséges kategóriába sorolja.

G73. feladat

A kombinatorika területéhez a feladatkitűzés jellege miatt kapcsolódik a *G73. feladat*, amelyben egy rejtett univerzális kvantort tartalmazó állítás helyes és logikailag helytelen átfogalmazásairól kell a tanulónak döntést hoznia. A feladat elsősorban a deduktív gondolkodást értékeli.

2.4. Irodalom

Adey, P. és Csapó, B. (2011): Developing and assessing scientific reasoning. In: Csapó Benő és Szabó Gábor (szerk.): *Framework for diagnostic assessment of science*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–53.

Berends, I. E., és van Lieshout, E. C. D. M. (2009): The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, **19**. 345–53.

Carroll, J. B. (1998): Matematikai képességek: a faktoranalízis néhány eredménye. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (1998): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 13–37.

Chan, D. W. (2007): Gender differences in spatial ability: Relationship to spatial experience among Chinese gifted students in Hongkong. *Roeper Review*, **29**. 277–282.

Csapó Benő (1988): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (1997): The development of inductive reasoning: Cross-sectional assessments in an educational context. *International Journal of Behavioral Development*, **20**. 609–626.

Csapó Benő (2002): Az új tudás képződésének eszközei: az induktív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 261–290.

Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (2004): *Tudás és iskola*. Műszaki Kiadó, Budapest.

Csapó Benő és Molnár Gyöngyvér (2012): Gondolkodási készségek és képességek. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 407–440.

Csíkos Csaba és Csapó Benő (2011): A diagnosztikus matematika felmérések részletes tartalmi kereteinek kidolgozása: elméleti alapok és gyakorlati kérdések. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 141–168.

Csíkos, C. és Verschaffel, L. (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–97.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel P. és Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, **20**. 487–506.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. és Wilson, A. J. (2004): Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, **14**. 218–224. DOI:10.1016/j.conb.2004.03.008

Gardner, H. és Hatch, T. (1989): Multiple intelligences go to school: educational implications of the theory of multiple intelligences. *Educational Researcher*, **18**. 4–10

Ginsburg, H. P. (1998): Toby matekja. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 175–199.

Molnár, G. (2011): Playful fostering of 6- to 8-year-old students' inductive reasoning. *Thinking Skills and Creativity*, **6**. 91–99.

Molnár Gyöngyvér. és Csapó Benő (2003): A képességek fejlődésének logisztikus modellje. *Iskolakultúra*, **13**. 2. sz. 57–69.

Molnár Gyöngyvér és Csapó Benő (2011): Az 1–11 évfolyamot átfogó induktív gondolkodás kompetenciaskála készítése a valószínűségi tesztelmélet alkalmazásával. *Magyar Pedagógia*, 2. sz. 127–140.

Nagy József (2003): A rendszerező képesség fejlődésének kritériumorientált feltárása. *Magyar Pedagógia*, **103**. 269–312.
Nagy József (2010): *Új pedagógia kultúra*. Mozaik Kiadó, Szeged.
Nemzeti alaptanterv (2012):
Nunes, Terezinha és Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.
Opfer, J. E. és Siegler, R. S. (2007): Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, **55**. 169–195.
Perkins, D. N. és Salomon, G. (1989): Are cognitive skills context-bound? *Educational Researcher*, **18**. 16–25.
Schliemann, A. D. és Carraher, D. W. (2002): The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, **22**. 242–266.
Schwartz, D. L. és Moore, J. L. (1998): On the role of mathematics in explaining the real world: Mental models for proportional reasoning. *Cognitive Science*, **22**. 471–516.
Séra László, Kárpáti Andrea és Gulyás János (2002): *A térszemlélet*. Comenius Bt., Pécs.
Sternberg, R. J. (1985): Teaching critical thinking: Are we making critical mistakes? Possible solutions. In: Marcia, H. és Slomianko, J. (szerk.): *Thinking skills instruction: Concepts and techniques. Building students' thinking skills series.* CT: NEA Professional Library, West Haven. 208–216.
Szitányi, J. és Csíkos, C. (2015): Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In: Beswick, K., Muir, T. és Wells, J. (szerk.): *Proceedings of 39th psychology of mathematics education conference*, Vol. 4, pp. PME, Hobart, Australia. 225–232.
Toluk Ucar, Z. és Yavuz, B. (2011): Elementary school students' intuitive understanding of the inequality signs. In: Ubuz, B. (szerk.): *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education - Developing mathematical thinking*. Vol 4. PME. Orta Doğu Teknik Üniversitesi [Middle East Technical University] Ankara, Turkey. 249–256.
Varga József, Józsa Krisztián és Pap-Szigeti Róbert (2007): Az arányosságszámítási készség kritériumorientált fejlesztése 7. osztályban. *Magyar Pedagógia*, **107**. 5–27.
Vidákovich Tibor (2002): Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 201–230.
Vidákovich Tibor (2008a): *A matematikai kompetencia fejlesztése más tantárgyak keretei között.* Education Kht, Budapest.
Vidákovich Tibor (2008b): A tapasztalati következtetés fejlődése az óvodától a középiskoláig. *Magyar Pedagógia*, **108**. 199–224.